

Algebraische Topologie

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist ein reines Präsenzübungsblatt und dient zur Wiederholung des Stoffs der Topologie-Vorlesung des letzten Semesters. Viele Aufgaben sollten Ihnen bekannt vorkommen. Wenn Sie alle Aufgaben ohne Hilfsmittel lösen können, sind Sie sehr gut vorbereitet für das kommende Semester. Wenn nicht, sehen Sie, welches Thema Sie noch einmal etwas genauer studieren sollten.

1 | Die Propositionen von Professor N. Aïve

Sei $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung zwischen zwei punktierten Räumen, die beide wegzusammenhängend sind, und sei $\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ der durch f induzierte Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\pi_1(f)$ ist injektiv, wenn f injektiv ist.
- (b) $\pi_1(f)$ ist surjektiv, wenn f surjektiv ist.
- (c) $\pi_1(f)$ ist ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.
- (d) Sei $X = Y = S^1$. Ist $\pi_1(f)$ injektiv, so ist f surjektiv.

2 | Potente Antipoden

- (a) Konstruieren Sie eine explizite Deformationsretraktion von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf S^n . Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Sei $a: S^n \rightarrow S^n$ die **Antipodenabbildung**, definiert durch $a(x) = -x$. Zeigen Sie, dass a homotop zur Identität ist, falls n ungerade ist.
- (c) Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine Abbildung, die nicht homotop zur Identität ist. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in S^1$ gibt mit $f(x) = -x$ und einen Punkt $y \in S^1$ mit $f(y) = y$. Was passiert, wenn wir S^1 durch S^n ersetzen?

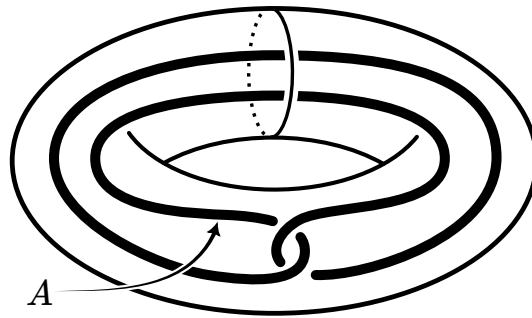
3 | Der reelle projektive Raum

Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Der **reelle projektive Raum** $\mathbb{RP}^n$ ist definiert als Quotient von S^n nach der Äquivalenzrelation $x \sim -x$. Was ist $\mathbb{RP}^1$? Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{RP}^n$ auch als Quotienten der n -dimensionalen Kreisscheibe D^n nach der Äquivalenzrelation $x \sim -x$ für $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ schreiben lässt. Leiten Sie daraus ab, dass für alle $n \geq 1$ der projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Anheften einer n -Zelle entsteht.

4 | Vertrackt

Zeigen Sie, dass es in den folgenden Fällen keine Retraktionen $r: X \rightarrow A$ gibt:

- (a) $X = D^2 \times D^2$ und $A = \partial X = S^1 \times S^1$
- (b) $X = \mathbb{R}^3$ und A irgendein Teilraum, der homöomorph zu S^1 ist
- (c) $X = S^1 \times D^2$ und $A = \partial X = S^1 \times S^1$
- (d) $X = S^1 \times D^2$ und $A = \{x_0\} \times S^1$ mit x_0 ein beliebiger Punkt in S^1
- (e) $X = S^1 \times D^2$ und A das Bild der folgenden Einbettung von S^1 :



5 | Karol hilft Stanisław auf die Sprünge

Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Wie lautet die Definition einer Hochhebung eines Weges auf X ? Lassen sich Wege immer hochheben? Sind die Hochhebungen eindeutig?

Betrachten Sie nun einen Weg zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten auf S^2 . Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung

$$f: S^2 \rightarrow S^1$$

gibt, so dass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$ gilt.

6 | Bastellei

Betrachten Sie $X = S^1 \vee S^1$ mit dem Wedge-Punkt x_0 als Basispunkt. Dann gilt nach Seifert-van-Kampen $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b \rangle$, wobei a und b die beiden Schleifen sind, die jeweils um einen der beiden Kreise verlaufen. Beschreiben Sie die Überlagerungen, die den folgenden Untergruppen entsprechen:

- (a) $\langle\langle ab \rangle\rangle$, die von ab normal erzeugte Untergruppe,
- (b) $\langle ab \rangle$, die von ab erzeugte Untergruppe,
- (c) der Kern des Homomorphismus $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/6$, definiert durch $\varphi(a) = [2]$ und $\varphi(b) = [3]$.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 1

★ 1 | Klein und simpel

Geben Sie der Kleinschen Flasche die Struktur eines Δ -Komplexes. Bestimmen Sie den zugehörigen simplizialen Kettenkomplex und berechnen Sie anschließend die Homologie dieses Kettenkomplexes. Verifizieren Sie, dass die erste Homologiegruppe die Abelianisierung der Fundamentalgruppe ist. Wiederholen Sie anschließend die Rechnung für $\mathbb{RP}^2$ anstelle der Kleinschen Flasche.

★ 2 | Zerfall von kurzen exakten Sequenzen

Sei R ein Ring (mit Eins) und

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (*)$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert eine Retraktion von f , also ein Homomorphismus $r: B \rightarrow A$ mit $r \circ f = \text{id}_A$.

(b) Es existiert eine Sektion von g , also ein Homomorphismus $s: C \rightarrow B$ mit $g \circ s = \text{id}_C$.

(c) Es existiert ein Isomorphismus $B \cong A \oplus C$, der das rechte Diagramm kommutativ macht, wobei i und p die offensichtliche Inklusion bzw. Projektion sind (d. h. $i(a) = (a, 0)$ und $p(a, c) = c$).

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & f \nearrow & & \searrow g & \\ A & & & & C \\ & i \searrow & & \nearrow p & \\ & & A \oplus C & & \end{array}$$

Gilt eine (und damit alle) der drei Aussagen, so sagt man, dass die exakte Sequenz $(*)$ zerfällt (engl.: split exact sequence). Folgern Sie, dass $(*)$ zerfällt, falls C ein freier R -Modul ist.

★ 3 | Exakt!

Versuchen Sie für jede der folgenden exakten Sequenzen abelscher Gruppen, so viel wie möglich über die Gruppe G und den Homomorphismus α herauszufinden. Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

(a) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

(b) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$

(c) $0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$

(d) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

4 | Studentenfutter

Beschreiben Sie Kern, Bild und Kokern von jedem der folgenden Homomorphismen. *[Zur Erinnerung: Für einen Homomorphismus $f: A \rightarrow B$ von Gruppen oder Vektorräumen ist sein Kokern der Quotient $B/\text{Im}(f)$.]*

- (a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, gegeben durch $n \mapsto 2n$;
- (b) $\mathbb{Z}/r \rightarrow \mathbb{Z}/2r$, gegeben durch $n \mapsto 2n$;
- (c) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4$, gegeben durch $(n, m) \mapsto (2n, 2m)$;
- (d) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $x \mapsto (x, -x)$;
- (e) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $(a, b) \mapsto (a + b, a - b)$;
- (f) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, gegeben durch $(a, b) \mapsto (a + b, a - b)$.

Berechnen Sie schließlich die Homologie des Kettenkomplexes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

wobei die Homomorphismen f und g durch $f(n) = (0, 3n)$ und $g(y, z) = 2y$ gegeben sind.

5 | Minimal verhüllt

Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in A$ auch jeder Punkt auf der Strecke zwischen x und y in A liegt. u
Seien nun $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Zeigen Sie, dass der n -Simplex

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0 \right\}$$

die kleinste konvexe Menge ist, die die Punkte $v_0, \dots, v_n$ enthält.

Sei nun $n > 1$ und betrachten Sie den n -Simplex Δ^n als Δ -Komplex. Zeigen Sie, dass $H_*^\Delta(\Delta^n) = 0$ für $*$ $= n$ und $*$ $= n - 1$. Folgern Sie daraus, dass $H_{n-1}^\Delta(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$.

(Diese Berechnung ist deswegen recht interessant, weil Δ^n homöomorph zu D^n und $\partial\Delta^n$ homöomorph zu $\partial D^n = S^{n-1}$ ist; vgl. die Gleichungen am Ende von 1.3 im Skript der ersten Vorlesung.)

Algebraische Topologie

Übungsblatt 2

1 | Kettenhomotopie als Kettenhomologie

Seien (C, d) und (C', d') zwei Kettenkomplexe von R -Moduln. Wir definieren für $m \in \mathbb{Z}$

$$\text{Mat}_m := \text{Mat}_m((C, d), (C', d')) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(C_n, C'_{n+m}),$$

wobei $\text{Hom}_R(\cdot, \cdot)$ den R -Modul von R -Modulhomomorphismen bezeichnet. Wir definieren ferner Abbildungen

$$\begin{aligned} D_m: \text{Mat}_m((C, d), (C', d')) &\rightarrow \text{Mat}_{m-1}((C, d), (C', d')) \\ f &\mapsto d' \circ f - (-1)^m f \circ d \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (Mat, D) ein Kettenkomplex ist. Interpretieren Sie die 0te Homologiegruppe dieses Kettenkomplexes.

Mittels dieser Konstruktion kann man die Kategorie der Kettenkomplexe als sogenannte angereicherte Kategorie „über sich selbst“ betrachten, d.h., die Morphismenräume von Kettenkomplexen sind selbst Kettenkomplexe.

2 | Homologie von Kettenabbildungen

Im folgenden Diagramm stellen die Zeilen Kettenkomplexe dar, und die vertikalen Abbildungen eine Kettenabbildung f vom oberen Kettenkomplex C_* zum unteren Kettenkomplex D_* :

$$\begin{array}{ccccccc} C_* & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & \downarrow f & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ D_* & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit den Homomorphismen

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= (x - y, x - y, x - y), & \beta(x, y, z) &= (z - x, 0), \\ f_2(x, y) &= (2x, 2y), & f_1(x, y, z) &= 2x + 2y, & f_0(x, y) &= y, \\ \gamma(x, y) &= 2x - 2y, & \delta(x) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Überprüfen Sie, dass C_* und D_* tatsächlich Kettenkomplexe sind und dass f tatsächlich eine Kettenabbildung ist.
- (b) Berechnen Sie die Homologie jedes Kettenkomplexes und die induzierte Abbildung in der Homologie.

★ 3 | Kleiner Euler

Sei

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}^a \longrightarrow \mathbb{Q}^b \longrightarrow \mathbb{Q}^c \longrightarrow \mathbb{Q}^d \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Zeigen Sie, dass $a + b + c + d$ gerade ist.

★ 4 | Aufräumen

Sei (C, d) ein Kettenkomplex über einem Ring R . Sei ferner $a \in \text{Mat}_0((C, d), (C, d))$ mit Notation wie in Aufgabe 1. Angenommen $a^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $(C, d + da - ad - ada)$ ein Kettenkomplex ist und dass er sogar isomorph zu (C, d) ist.

[Hinweis: Führen Sie nach Möglichkeit keine Indizes ein, sonst geraten Sie in Index-Höllen; mit anderen Worten: Ignorieren Sie die Zerlegung von C in die Kettenmodule C_n .]

★ 5 | Jagd im Labyrinth

Betrachten Sie das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

in dem die Zeilen exakt sind. Zeigen Sie, dass h_3 ein Isomorphismus ist, falls h_1, h_2, h_4, h_5 Isomorphismen sind. Kann man die Voraussetzungen abschwächen, ohne die Schlussfolgerung zu ändern?

Algebraische Topologie

Übungsblatt 3

1 | Eine pedantische Schlange

Vervollständigen Sie den Beweis des Schlangenlemmas, d. h. zeigen Sie, dass die Sequenz bei $\operatorname{coker} u$ und $\operatorname{coker} u'$ exakt ist.

2 | Kurze Homotopien

(a) Seien

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_0 \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\beta} B_0 \longrightarrow 0$$

Kettenkomplexe von freien R -Moduln, die bei A_1 bzw. B_1 exakt sind. Zeigen Sie, dass die Kettenkomplexe homotopieäquivalent sind, falls sie die gleiche Homologie besitzen.

(b) Finden Sie zwei Kettenkomplexe von Abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_0 \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\beta} B_0 \longrightarrow 0 ,$$

die bei A_1 bzw. B_1 exakt sind und die gleiche Homologie besitzen, allerdings nicht homotopieäquivalent sind.

★ 3 | Homologie detektiert Homotopie

(a) Sei (C, d) ein Kettenkomplex von freien Abelschen Gruppen. Zeigen Sie, dass (C, d) isomorph zu der direkten Summe von Kettenkomplexen der Form

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} d_{n+1} \xrightarrow{\delta_n} \ker d_n \longrightarrow 0$$

ist. *[Tipp: Übungsblatt 1, Aufgabe 2]*

(b) Seien nun (C, d) und (C', d') Kettenkomplexe von freien Abelschen Gruppen. Zeigen Sie, dass (C, d) und (C', d') homotopieäquivalent sind, falls sie die gleiche Homologie besitzen.

(c) Gelten die Aussagen in (a) und (b) auch noch, wenn man Abelsche Gruppen durch Vektorräume über einem Körper ersetzt?

★ 4 | Euler

Sei (C, d) ein Kettenkomplex über einem Körper k . Angenommen, (C, d) ist **endlich**, d. h. C_n ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k für alle n , und **beschränkt**, d. h. $C_n = 0$ für alle bis auf endlich viele n . Sei H_* die Homologie von (C, d) . Zeigen Sie unter Verwendung des Rangsatzes (oder auf andere Weise), dass

$$\chi(C, d) := \sum (-1)^n \dim_k(H_n) = \sum (-1)^n \dim_k(C_n).$$

$\chi(C, d)$ heißt die **Euler-Charakteristik** von (C, d) . Sei

$$0 \rightarrow (C', d') \rightarrow (C, d) \rightarrow (C'', d'') \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz endlicher, beschränkter Kettenkomplexe über einem Körper k . Zeigen Sie unter Verwendung der induzierten langen exakten Sequenz, dass

$$\chi(C, d) = \chi(C', d') + \chi(C'', d'').$$

★ 5 | Wegkürzen

Sei (C, d) ein Kettenkomplex über einem Ring R . Angenommen, $C_n = C'_n \oplus A$, $C_{n-1} = C'_{n-1} \oplus A$ für gewisse R -Moduln C'_n und C'_{n-1} derart, dass die Differenzialabbildung $d_n: C'_n \oplus A \rightarrow C'_{n-1} \oplus A$ die Form

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1_A \end{bmatrix}$$

hat. Setze $C'_i = C_i$ für $i \neq n, n-1$. Zeigen Sie, dass (C, d) zu einem Kettenkomplex mit zugrundeliegendem Kettenmodul C' „kettenretrahiert“; das heißt, zeigen Sie, dass es ein Differenzial d' auf C' und zwei Kettenabbildungen

$$(C, d) \begin{matrix} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{r} \end{matrix} (C', d')$$

gibt, so dass $rs = 1_{C'}$ und $sr \simeq 1_C$ gilt.

[Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 aus Übungsblatt 2 (Aufräumen), um einen Kettenisomorphismus zwischen (C, d) und einem Kettenkomplex mit demselben zugrundeliegenden Kettenmodul C zu konstruieren, bei dem das Differential $C'_n \oplus A \rightarrow C'_{n-1} \oplus A$ eine Diagonalmatrix ist. Konstruieren Sie dann einen Kettenretrakt für diesen neuen Kettenkomplex.]

Algebraische Topologie

Übungsblatt 4

★ 1 | !

Angenommen, F ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Abelschen Gruppen, mit der Eigenschaft, dass für homotope Abbildungen $f \simeq g: X \rightarrow Y$ gilt:

$$F(f) = F(g): F(X) \rightarrow F(Y).$$

Zeige, dass $F(A) \cong F(B)$ für homotopieäquivalente Räume A und B gilt.

★ 2 | Baby Hurewicz

Erinnern wir uns daran, dass wir einen Weg $\gamma: I \rightarrow X$ als einen singulären Simplex $\sigma_\gamma: \Delta_1 \rightarrow X$ auffassen können, da $\Delta_1 = I$; der Unterschied liegt lediglich in der Notation. Zeigen Sie:

- (a) Ist ein Weg γ konstant, so ist σ_γ nullhomotop (d. h. ein Rand).
- (b) Sind γ und γ' homotope Wege, d.h. homotop relativ zu ihren Start- und Endpunkten, so ist $\sigma_\gamma - \sigma_{\gamma'}$ ein Rand.
- (c) Für zwei Wege γ und γ' mit $\gamma(1) = \gamma'(0)$ ist $\sigma_{\gamma'\gamma} - (\sigma_{\gamma'} + \sigma_\gamma)$ ein Rand.

Folgern Sie schließlich daraus, dass die Abbildung

$$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X), \quad [\gamma] \mapsto [\sigma_\gamma],$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist.

★ 3 | Heegaard kocht mit Hurewicz Linsen

Betrachten Sie zwei Volltori

$$T_1 = D^2 \times S^1 \quad \text{und} \quad T_2 = D^2 \times S^1.$$

Indem wir S^1 mit dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ identifizieren, können wir ∂T_1 und ∂T_2 als Teilmengen von $\mathbb{C}^2$ auffassen. Sei $f: \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ die Abbildung

$$(z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$$

für ganze Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$.

Sei L der Quotient der disjunkten Vereinigung $T_1 \sqcup T_2$ nach der Äquivalenzrelation, die durch

$$\partial T_1 \ni x \sim f(x) \in \partial T_2$$

erzeugt wird.

- (a) Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist. (Damit ist L einfach der Raum, der entsteht, wenn man zwei Volltori entlang ihrer Ränder miteinander verklebt — und f gibt lediglich an, *wie* diese Ränder identifiziert werden.)
- (b) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von L und anschließend $H_0(L)$ und $H_1(L)$.

4 | Reduzierte Homologie

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{C}_n(X) := \begin{cases} C_n(X) & \text{für } n \neq -1 \\ \mathbb{Z} & \text{für } n = -1 \end{cases}$$

und $\tilde{d}_n = d_n$ für $n \neq 0$ sowie

$$\tilde{d}_0: \tilde{C}_0(X) = C_0(X) \rightarrow \tilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$$

definiert durch

$$\left(\sum_i n_i \sigma_i \right) \mapsto \left(\sum_i n_i \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(\tilde{C}_*(X), \tilde{d}_*)$ ein Kettenkomplex ist.

Wir definieren

$$\tilde{H}_n(X) := H_n(\tilde{C}_*(X), \tilde{d}_*).$$

Dies nennt man die *reduzierte singuläre Homologie von X* .

- (b) Zeigen Sie, dass $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ für alle nichtleeren Räume X und alle $n \neq 0$ gilt.
- (c) Zeigen Sie ferner, dass $\tilde{H}_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe ist mit Rang

$$\#\{\text{wegzusammenhängende Komponenten von } X\} - 1.$$

- (c) Berechnen Sie die reduzierte singuläre Homologie von D^n für alle n .

5 | Nichtkommutativ

Angenommen, Y ist ein topologischer Raum und X eine Teilmenge davon. Wir definieren die relative Homologie von dem Paar (Y, X) als die Homologie von dem Quotientenkomplex

$$C_n(Y, X) = C_n(Y)/C_n(X).$$

Nach Definition bilden dann die zugehörigen Kettengruppen

$$0 \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(Y) \rightarrow C_*(Y, X) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Erklären Sie, warum die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \rightarrow C_n(Y, X) \rightarrow 0$$

zerfallen, d. h. $C_n(Y) \cong C_n(X) \oplus C_n(Y, X)$, aber warum daraus dennoch nicht notwendigerweise folgt, dass $H_n(Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y, X)$ gilt.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 5

1 | Coprodukte

Zeigen Sie, dass die singuläre Homologie der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ zweier topologischer Räume X und Y wie folgt berechnet werden kann:

$$H_*(X \sqcup Y) \cong H_*(X) \oplus H_*(Y).$$

2 | Puzzlelei

Sei $X = A \cup B$ eine geeignete Mayer–Vietoris-Zerlegung eines Raumes X und $A \simeq B \simeq A \cap B \simeq S^1$. Welche möglichen Werte kann die Homologie von X annehmen? Muss X ebenfalls homotopieäquivalent zu S^1 sein?

★ 3 | 3D

Angenommen, wir haben zwei kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen und drei Kettenabbildungen u', u, u'' , die das folgende Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (C', d') & \xrightarrow{f} & (C, d) & \xrightarrow{g} & (C'', d'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' \\ 0 & \longrightarrow & (\tilde{C}', \tilde{d}') & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{C}, \tilde{d}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & (\tilde{C}'', \tilde{d}'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die durch u', u und u'' induzierten Abbildungen in der Homologie einen Kettenhomomorphismus zwischen den langen exakten Sequenzen bilden, die zu den gegebenen kurzen exakten Sequenzen gehören. Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass das folgende Diagramm für alle n kommutiert:

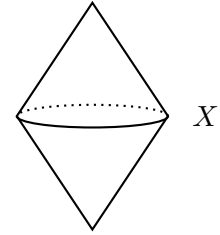
$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(C', d') & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(C, d) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(C'', d'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C', d') \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow H_n(u') & & \downarrow H_n(u) & & \downarrow H_n(u'') \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(\tilde{C}', \tilde{d}') & \xrightarrow{H_n(\tilde{f})} & H_n(\tilde{C}, \tilde{d}) & \xrightarrow{H_n(\tilde{g})} & H_n(\tilde{C}'', \tilde{d}'') \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} H_{n-1}(\tilde{C}', \tilde{d}') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

★ 4 | Einhängung

In Aufgabe 5 auf Übungsblatt 6 hatten wir im letzten Semester die Einhängung (englisch: Suspension) eines topologischen Raumes X definiert durch

$$S(X) := X \times [-1, 1] / \sim,$$

wobei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation ist mit $(x, +1) \sim (y, +1)$ und $(x, -1) \sim (y, -1)$ für alle $x, y \in X$.



- (a) Zeigen Sie, dass $S(S^m)$ homöomorph zu S^{m+1} ist.
- (b) Verwenden Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz, um zu zeigen, dass

$$\tilde{H}_n(S(X)) \cong \tilde{H}_{n-1}(X).$$

- (c) Berechnen Sie die Homologiegruppen der Sphären.
- (d) Sei für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ die Abbildung $S(f): S(X) \rightarrow S(Y)$ induziert durch

$$f \times \text{id}: X \times [-1, 1] \rightarrow Y \times [-1, 1].$$

Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n-1}(X) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S(X)) \\ \downarrow f_* & & \downarrow S(f)_* \\ \tilde{H}_{n-1}(Y) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S(Y)) \end{array}$$

★ 5 | Nützliche Platten

Seien $n, m \in \mathbb{Z}^{>0}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist genau dann, wenn $n = m$.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 6

1 | Grade

Sei φ ein Isomorphismus zwischen $H_n(S^n)$ und $\mathbb{Z}$. Definiere den Grad $\deg(f)$ einer Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ als die ganze Zahl, die das folgende Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot \deg(f)} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(S^n) \end{array}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Zahl $\deg(f)$ ist unabhängig von der Wahl des Isomorphismus φ .
- (b) Für zwei beliebige Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow S^n$ gilt $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.
- (c) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ mit $\deg(f) = d$.

2 | Heegaard kocht mit Mayer und Vietoris Linsen

Sei L wie in Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 4, nämlich das Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{\subseteq} & D^2 \times S^1 \\ f \downarrow & & \downarrow \\ S^1 \times D^2 & \longrightarrow & L \end{array}$$

wobei $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d und $ad - bc = \pm 1$ ist. Nutzen Sie die lange exakte Sequenz von Mayer-Vietoris, um die Homologie von L zu berechnen. Vergleichen Sie Ihre Antwort mit Ihrer Antwort zu Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 4.

★ 3 | Matryoshka

Sphären können verschachtelt werden,

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset S^4,$$

indem jede Sphäre als Äquator der nächsthöheren betrachtet wird. Was ist $H_*(S^4/S^r)$ für jedes $r = 0, 1, 2, 3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ 4 | Pascal

Angenommen, X sei ein Raum, dessen Homologiegruppen $H_n(X)$ frei von endlichem Rang sind, d. h. $H_n(X) \cong \mathbb{Z}^{d_n}$ für alle n , wobei $d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- Verwenden Sie eine Zerlegung des Kreises S^1 in zwei offene Teilräume, um die Homologiegruppen $H_n(X \times S^1)$ als Funktion der Zahlen d_n zu berechnen.
- Bestimmen Sie für alle ganzen Zahlen $N > 0$ die Homologiegruppen des N -dimensionalen Torus

$$T^N = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_N.$$

★ 5 | Möbius ist zweimal so Klein

Gegeben sei ein kommutativer Ring R . Wir definieren die Homologie $H_*(X; R)$ eines topologischen Raumes X mit Koeffizienten in R als die Homologie des Kettenkomplexes

$$C_*(X; R) := C_*(X) \otimes R.$$

Analog definieren wir die reduzierte Homologie $\tilde{H}_*(X; R)$ eines topologischen Raumes X mit Koeffizienten in R als die Homologie des Kettenkomplexes

$$\tilde{C}_*(X; R) := \tilde{C}_*(X) \otimes R.$$

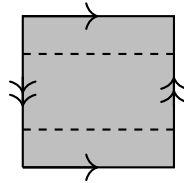
Zur Erinnerung aus der Algebra: Es gilt $\mathbb{Z}^m \otimes R \cong R^m$ für jedes m . Insbesondere gilt also $H_*(X) = H_*(X; \mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_*(X) = \tilde{H}_*(X; \mathbb{Z})$.

Notation: Beachte das Semikolon, das X und R trennt! Verwechseln Sie $H_(X; R)$ nicht mit der relativen Homologie $H_*(X, Y)$ für einen Unterraum $Y \subseteq X$.*

- Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz von Mayer–Vietoris, dass für jeden Ring R

$$\tilde{H}_1(S^1; R) \cong R \quad \text{und} \quad \tilde{H}_n(S^1; R) \cong 0 \quad \text{für } n \neq 1.$$

- Sei K die Kleinsche Flasche:



Berechnen Sie mit Hilfe der Mayer–Vietoris-Sequenz $\tilde{H}_*(K; R)$ für $R = \mathbb{Z}$ und für $R = \mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (mit p prim), indem Sie K entlang des oben durch die gestrichelten Linien angegebenen Kreises „aufschneiden“, d. h. indem Sie K in zwei Teilräume A und B zerlegen, so dass $A \cap B$ diesen Kreis als Deformationsretrakt enthält.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 7

1 | Komplexe Erinnerungen auffrischen

Sei $\mathbb{C}P^n$ der n -dimensionale komplexe projektive Raum, definiert als Quotient von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ durch die Äquivalenzrelation

$$x \sim y : \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } |\lambda| = 1 \text{ derart, dass } x = \lambda y).$$

- (a) Zeigen Sie, dass man $\mathbb{C}P^n$ auch als Quotienten der Kreisscheibe D^{2n} auffassen kann, wobei auf dem Rand $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$ dieselbe Äquivalenzrelation verwendet wird.
- (b) Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{C}P^n$ homöomorph zu einem Zellkomplex ist, der genau eine $2k$ -Zelle für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ besitzt.
- (c) Berechnen Sie die Homologie von $\mathbb{C}P^n$.

2 | Produkte von endlichen Zellkomplexen

Seien X und Y endliche Zellkomplexe. Zeigen Sie, dass $X \times Y$ ebenfalls die Struktur eines endlichen Zellkomplexes hat.

★ 3 | Grade der Trivialität

- (a) Zeigen Sie, dass der Grad einer Homotopieäquivalenz $f: S^n \rightarrow S^n$ gleich ± 1 ist.
- (b) Zeigen Sie, dass der Grad jeder Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$, die nicht surjektiv ist, gleich null ist.
- (c) Konstruieren Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine surjektive Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ vom Grad null.

★ 4 | Freiheitsgrade

Erinnern wir uns daran, dass eine Wirkung einer Gruppe G auf einem Raum X ein Homomorphismus von G in die Gruppe $\text{Homeo}(X)$ der Homeomorphismen $X \rightarrow X$ ist, und dass die Wirkung frei heißt, wenn der Homeomorphismus, der zu jedem nichttrivialen Element von G gehört, keine Fixpunkte besitzt. Ein Beispiel hierfür ist die antipodale Abbildung $x \mapsto -x$, die eine freie Wirkung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf S^n erzeugt.

Angenommen, n ist gerade. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in der Tat die (bis auf Isomorphie) *einzige* nichttriviale Gruppe ist, die frei auf S^n wirken kann.

[Tipp: Aufgabe 2 auf Übungsblatt 0]

★ 5 | Euler ist ganz brav

Die Euler-Charakteristik eines endlichen Zellkomplexes ist definiert als die Euler-Charakteristik seines zellulären Kettenkomplexes; siehe Aufgabe 4 auf Übungsblatt 3. Zeigen Sie:

- (a) Ist X ein endlicher Zellkomplex und sind A und B zwei Unterräume mit $X = A \cup B$ derart, dass A , B und $A \cap B$ jeweils von X die Strukturen von Zellkomplexen erben, so gilt

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

- (b) Sind X und Y endliche Zellkomplexe, so gilt

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

Algebraische Topologie

Übungsblatt 8

1 | Gummiband

Bei der Berechnung der lokalen Grade der Abbildung

$$f_k: S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto z^k$$

hatten wir $V = S^1 \setminus \{-1\}$ als offene Umgebung von y gewählt und U die Zusammenhangskomponente von $f_k^{-1}(V)$, die den Punkt $x = 1$ enthält. Wir hatten behauptet, dass es eine stetige Abbildung

$$g_k: S^1 \rightarrow S^1$$

gibt derart, dass $g_k|_U = f_k|_U$, $g_k \simeq 1_{S^1}$ und $g_k^{-1}(y) = \{x\}$.

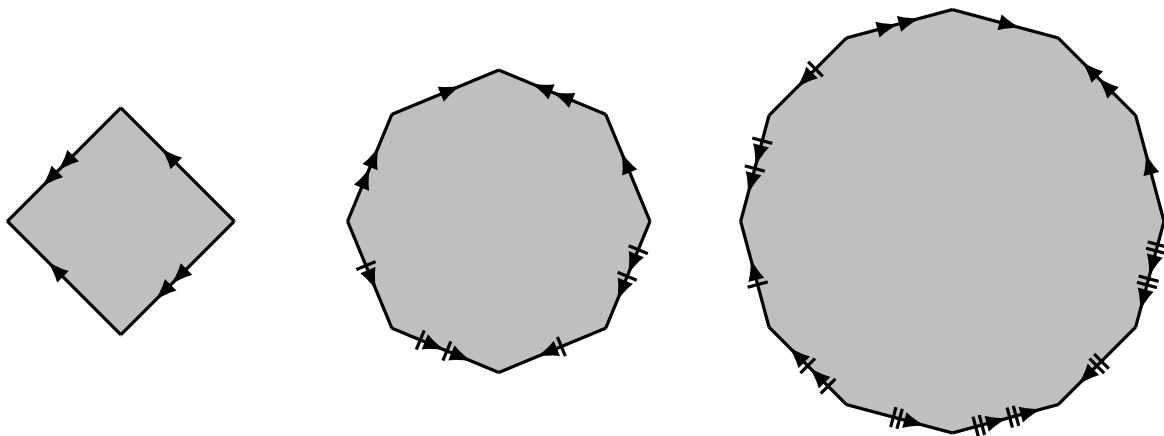
Finden Sie nun eine solche Abbildung g_k . Begründen Sie Ihre Antwort.

2 | Konsistent

Bestimmen Sie für jedes $n \geq 0$ den zellulären Kettenkomplex der n -dimensionalen Sphäre S^n , die wir mit der Zellstruktur versehen, die für jedes $k = 0, 1, \dots, n$ aus zwei k -Zellen besteht. Überprüfen Sie, dass dieser Kettenkomplex die korrekten Homologiegruppen berechnet.

★ 3 | Von West nach Ost

Berechnen Sie die zellulären Kettenkomplexe der topologischen Räume, die aus den folgenden Polygonen entstehen, indem die Seiten entsprechend den durch die Pfeile vorgegebenen Vorschriften miteinander verklebt werden:



Bestimmen Sie anschließend die Euler-Charakteristik und die Homologie dieser Räume. Erkennen Sie ein Muster? Wie lässt es sich verallgemeinern?

★ 4 | Charakterfrage

Sei $n \geq 1$ und $\mathbf{k}$ ein Körper. Berechnen Sie $H_*(\mathbb{RP}^n; \mathbf{k})$.

[Siehe Übungsblatt 6, Aufgabe 5 für die Definition von Homologie mit Koeffizienten.]

★ 5 | Karussell

Für diese Aufgabe wird vorausgesetzt, dass Sie mit Überlagerungstheorie vertraut sind; siehe [Hatcher, Kapitel 1.3].

Wir konstruieren einen Raum X wie folgt: Seien Z_1 , Z_2 und Z_3 Kopien der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien $x_i = (0, 0, 1)$ der Nordpol und $y_i = (0, 0, -1)$ der Südpol. Dann definieren wir

$$X = (Z_1 + Z_2 + Z_3) / \sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die durch $x_1 \sim y_2$, $x_2 \sim y_3$ und $x_3 \sim y_1$ erzeugt wird.

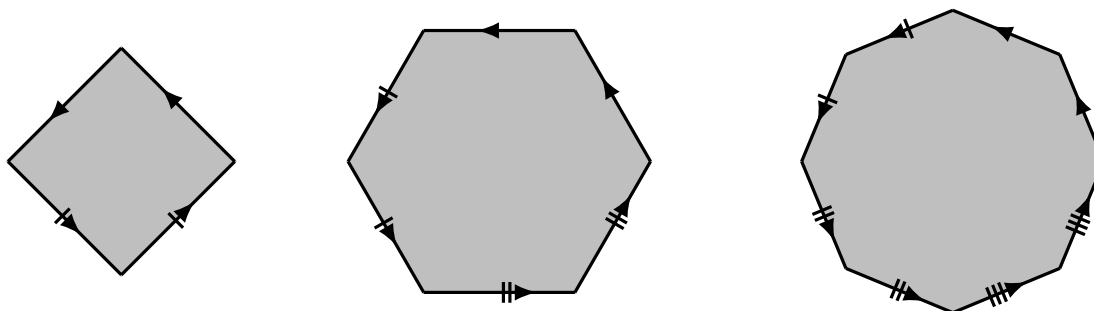
- (a) Beschreiben Sie die universelle Überlagerung von X und berechnen Sie die Fundamentalgruppe von X .
- (b) Zeigen Sie, dass X nicht homotopieäquivalent zu einem Kreis S^1 ist.
- (c) Finden Sie eine Abbildung $f: S^1 \vee S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$ mit der Eigenschaft, dass die Abbildungen $H_n(f)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Identitäten sind, aber f selbst nicht homotop zur Identität ist.

Algebraische Topologie

🌲 Übungsblatt 9 🌲

1 | Von Ost nach West

Berechnen Sie die zellulären Kettenkomplexe mit Koeffizienten in einem Ring R für die Flächen, die aus den folgenden Polygonen entstehen, indem die Seiten gemäß der durch die Pfeile auf den Rändern angegebenen Vorschrift miteinander verklebt werden:



Bestimmen Sie anschließend die Homologie dieser Räume für $R = \mathbb{Z}$ sowie für $R = \mathbb{F}_p$ für eine beliebige Primzahl p . Berechnen Sie außerdem die Euler-Charakteristiken dieser Räume. Hängt die Euler-Charakteristik von p ab?

2 | Fidget-Spinner

Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung eines zusammenhängenden, endlichen Zellkomplexes. Zeigen Sie, dass

$$\chi(\tilde{X}) = n \cdot \chi(X).$$

Geben Sie eine komplette Beschreibung an, für welche $g, h \geq 0$ es eine Überlagerung einer orientierten Fläche von Geschlecht g durch eine orientierte Fläche von Geschlecht h gibt.

★ 3 | Zuviel des Graden

Wir erinnern uns daran, dass eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ gerade genannt wird, falls für alle $x \in S^n$ gilt: $f(-x) = f(x)$. Zeigen Sie: Der Grad einer geraden Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ ist gerade. Ist n ungerade, so gibt es gerade Abbildungen beliebigen geraden Grades. Ist jedoch n gerade, so hat jede gerade Abbildung den Grad 0.

Tipp: Folgende Beobachtung kann unter Umständen hilfreich sein: Falls n ungerade ist, induziert die Quotientenabbildung $\mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n/\mathbb{RP}^{n-1}$ einen Isomorphismus auf der n -ten Homologiegruppe.

★ 4 | Vollkommen perfekt

- (a) Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (b^{-1}a)^5 \rangle$$

nicht trivial ist, ihre Abelianisierung aber schon.

[Tipp: Finden Sie einen nichttrivialen Homomorphismus in die symmetrische Gruppe S_5 .]

- (b) Konstruieren Sie einen nicht zusammenziehbaren Zellkomplex X mit

$$H_*(X) = H_*(\{*\}).$$

★ 5 | ...die fünfte aber verwendete Gott für das All, indem er sie mit Bildern ausgestaltete

- (a) Nehmen Sie einen Ball und einen Stift. Markieren Sie eine positive Anzahl paarweise verschiedener Punkte auf dem Ball. Verbinden Sie die markierten Punkte anschließend durch endlich viele paarweise disjunkte Linien so, dass am Ende jede Fläche des Balls, d. h. jede Komponente der unmarkierten Region, homöomorph zu einer Scheibe ist. Zählen Sie nun die Anzahl E der markierten Punkte (E für „Ecken“), die Anzahl K der Linien (K für „Kanten“), und die Anzahl F der Flächen. Zeigen Sie, dass diese Zahlen stets die Identität

$$E - K + F = 2$$

erfüllen.

- (b) Nehmen Sie nun an, dass die Endpunkte jeder Kante verschieden sind und ebenso die Flächen auf beiden Seiten jeder Kante verschieden sind. Sei E_n die Anzahl der Ecken, die Endpunkte von genau n Kanten sind. Ebenso sei F_n die Anzahl der Flächen mit genau n Kanten. Zeigen Sie, dass

$$\sum_n nF_n = 2K = \sum_n nE_n.$$

- (c) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass jede Fläche mindestens drei Kanten hat und dass jede Ecke der Endpunkt von mindestens drei Kanten ist. Zeigen Sie, dass $K \geq 2F$, falls $F_3 = 0$ gilt, und dass $K \geq 2E$, falls $E_3 = 0$ gilt. Leiten Sie daraus ab, dass $F_3 + E_3 > 0$ gilt.
- (d) Zusätzlich zu den Annahmen in (c) sei nun noch $K > 0$, $F = F_p$ und $E = E_q$ für gewisse p und q . Leiten Sie daraus ab, dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Finden Sie alle Paare (p, q) , die diese Bedingung erfüllen.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 10

1 | Paarung

Zeigen Sie: Für jeden topologischen Raum X , jede Abelsche Gruppe G und $n \geq 0$ definiert

$$H^n(X; G) \otimes H_n(X) \longrightarrow G$$
$$[\alpha: C_n(X) \rightarrow G] \otimes [a \in C_n(X)] \longmapsto \langle [\alpha], [a] \rangle := \alpha(a)$$

einen Gruppenhomomorphismus. Zudem gilt für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$

$$\langle \alpha, f_*(a) \rangle = \langle f^*(\alpha), a \rangle.$$

2 | Freie Richtungsentscheidung

Sei G eine beliebige Abelsche Gruppe. Die Kohomologiefunktor H^n haben wir in der Vorlesung als rein algebraische Variation der Konstruktion von Homologie eingeführt: Man nimmt den Funktor

$$C_*: \mathbf{HoTop} \rightarrow \mathbf{Kom}_{\mathbb{Z}},$$

der jedem topologischen Raum den *freien* Kettenkomplex $C_*(X)$ zuordnet, und komponiert ihn mit dem (rein algebraisch definierten) kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Hom}(-, G): \mathbf{Kom}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{Kom}_{\mathbb{Z}},$$

bevor man (Ko)homologie nimmt. Was erhält man, wenn man stattdessen den kovarianten Funktor

$$\mathrm{Hom}(G, -): \mathbf{Kom}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{Kom}_{\mathbb{Z}}$$

verwendet?

★ 3 | Freie Auflösungen sind eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R -Modul. Eine freie Auflösung von M ist ein frei erzeugter Kettenkomplex (F, d) mit $F_i = 0$ für $i < 0$, $H_*(F, d) = 0$ für $* \neq 0$ und $H_0(F, d) \cong M$. Beachten Sie, dass die Bedingung an die Homologie äquivalent dazu ist, dass es eine exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

gibt. Angenommen, $f: M \rightarrow M'$ ist ein Homomorphismus von R -Moduln und (F, d) bzw. (F', d') sind freie Auflösungen von M bzw. M' . Zeigen Sie, dass sich f zu einem Kettenhomomorphismus zwischen den exakten Sequenzen fortsetzen lässt und dass diese Fortsetzung bis auf Homotopie eindeutig ist. Folgern Sie daraus, dass je zwei freie Auflösungen homotopieäquivalent sind.

★ 4 | Links-Rechts-Schwäche

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:

(a) Eine Sequenz von R -Moduln

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

ist exakt genau dann, wenn die folgende Sequenz für alle R -Moduln N exakt ist:

$$\mathrm{Hom}_R(M', N) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M'', N) \longleftarrow 0.$$

(b) Eine Sequenz von R -Moduln

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

ist exakt genau dann, wenn die folgende Sequenz für alle R -Moduln M exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, N'').$$

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass jede exakte Sequenz von R -Moduln

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

und jeder R -Modul N die folgende exakte Sequenz induzieren:

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0.$$

(d) Finden Sie ein Beispiel für (c), in dem f injektiv ist, $f \otimes 1_N$ aber nicht.

★ 5 | Würfelkomplex dank einer Prise Vorzeichen

Sei n eine positive ganze Zahl. Als Kante des n -dimensionalen Würfels $[0, 1]^n$ bezeichnen wir ein Paar $v, w \in \{0, 1\}^n$, geschrieben $v \rightarrow w$, mit der Eigenschaft, dass es ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ gibt derart, dass $v_i = w_i$ für alle $i \neq i_0$ und $v_{i_0} = 0$ und $w_{i_0} = 1$. Angenommen, wir haben

- eine Abelsche Gruppe $\mathcal{K}(v)$ für jedes $v \in \{0, 1\}^n$
- einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{K}(v \rightarrow w): \mathcal{K}(v) \rightarrow \mathcal{K}(w)$ für jede Kante $v \rightarrow w$

derart, dass für jedes Quadrat von Kanten das entsprechende Quadrat von Gruppenhomomorphismen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} v_{00} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} v_{01} \\ v_{10} \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} v_{11} \\ & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(v_{00}) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{K}(v_{01}) \\ \mathcal{K}(v_{10}) \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} & \mathcal{K}(v_{11}) \end{array} \quad (*)$$

Wähle eine $\{\pm 1\}$ -wertige Funktion ε auf der Menge der Kanten von $[0, 1]^n$, die den vier Kanten in jedem Quadrat $(*)$ eine ungerade Anzahl an Minuszeichen zuordnet. Seien

$$C^\ell(\mathcal{K}) = \bigoplus_{|v|=\ell} \mathcal{K}(v) \quad \text{und} \quad d^\ell: C^\ell(\mathcal{K}) \rightarrow C^{\ell+1}(\mathcal{K})$$

wobei $|v| = \sum_i v_i$ und $d^\ell|_{\mathcal{K}(v) \rightarrow \mathcal{K}(w)} = \varepsilon(v \rightarrow w) \cdot \mathcal{K}(v \rightarrow w)$, falls $v \rightarrow w$ eine Kante in $[0, 1]^n$ ist, und $d^\ell|_{\mathcal{K}(v) \rightarrow \mathcal{K}(w)} = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass $C^*(\mathcal{K})$ ein Kokettenkomplex ist und bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl von ε ist.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 11

1 | Ohne Koeffizientensequenz geht's auch

Führen Sie einen alternativen Beweis des Universellen Koeffizientensatzes für Homologie, indem Sie (analog zum Beweis des Universellen Koeffizientensatzes für Kohomologie aus der Vorlesung) den Funktor $- \otimes G$ auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_* \longrightarrow C_*(X) \xrightarrow{d_*} B_n \longrightarrow 0,$$

anwenden und die induzierte lange exakte Sequenz analysieren.

2 | Gleichstand

Sei $R = \mathbb{C}[x]/(x^3)$ und seien M_i für $i = 1, 2$ die R -Moduln $\mathbb{C}[x]/(x^i)$. Finden Sie eine freie Auflösung von M_1 und benutzen Sie sie, um $\text{Tor}_*^R(M_1, M_1)$ und $\text{Tor}_*^R(M_1, M_2)$ zu berechnen.

★ 3 | Tor, Tor, Tor!

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M und N R -Module. Zeigen Sie, dass $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes N$. Zeigen Sie außerdem, dass $\text{Tor}_1^R(M, N) = 0$, falls M oder N frei ist. Sei nun

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0, \tag{*}$$

eine exakte Sequenz von R -Moduln und M ein weiterer R -Modul. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \text{Tor}_2^R(M, N') \\ & & & & & & \downarrow \\ \hookrightarrow & \text{Tor}_1^R(M, N') & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(M, N) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(M, N'') & \downarrow \\ & & & & & & \downarrow \\ \hookrightarrow & M \otimes N' & \xrightarrow{1_M \otimes f} & M \otimes N & \xrightarrow{1_M \otimes g} & M \otimes N'' & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Sei nun $R = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N'') \cong \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(N'', M)$, indem Sie (*) als freie Auflösung von N'' betrachten. Identifizieren Sie schließlich $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), G)$ mit $\text{Tor}(H_{n-1}(X), G)$ aus der Vorlesung.

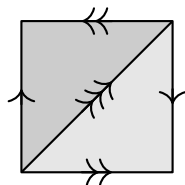
[Bemerkung: Allgemeiner gilt sogar $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M)$ über beliebigen kommutativen Ringen R und für beliebige n .]

★ 4 | Keine Quadrate

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $\alpha \smile \alpha = 0$ für jede Kohomologieklass $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z})$.
[Tipp: Betrachten Sie die 1-Kokette β definiert durch $\beta(\sigma) = \frac{1}{2}(\alpha(\sigma) - (\alpha(\sigma))^2)$.]

★ 5 | Ein Quadrat

Berechnen Sie den Kohomologiering $H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ direkt aus der Definition des $\smile$ -Produkts, indem Sie $\mathbb{RP}^2$ folgende Struktur eines Δ -Komplexes geben:



Algebraische Topologie

Übungsblatt 12

1 | Alles Moore, oder was?

(a) Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert einen Ringhomomorphismus $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$.

(b) Sind X, Y zwei topologische Räume, $a, a' \in H^*(X)$ und $b, b' \in H^*(Y)$ Kohomologieklassen, so gilt:

$$(a \times b) \smile (a' \times b') = (-1)^{|a'| \cdot |b|} \cdot (a \smile a') \times (b \smile b')$$

(c) Berechnen Sie den Kohomologiering von $S^n \times S^m$ für alle $n, m > 0$.

(d) Finden Sie zwei zusammenhängende, nicht homotopieäquivalente topologische Räume mit isomorphen Homologie-, Kohomologie- und Fundamentalgruppen.

2 | Duale Kurven

Geben Sie der orientierbaren Fläche $X = \Sigma_g$ von Geschlecht $g > 0$ die Struktur eines Δ -Komplexes. Konstruieren Sie den dualen Zellkomplex $X^\vee$ (wie in 7.1.4). Finden Sie eine explizite Basis von $H_1(X)$ und $H^1(X) \cong H_1(X^\vee)$. Können Sie die Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(X) \otimes H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

geometrisch interpretieren?

★ 3 | Graduiert kommutativ

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und X ein topologischer Raum. Für $n \geq 0$ sei $r_n: \Delta \rightarrow \Delta$ die affine Abbildung, die für alle $i = 0, \dots, n$ den Eckpunkt e_i von Δ auf e_{n-i} abbildet. Sei $\rho_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ die lineare Abbildung, die jeden singulären Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ auf $(-1)^{\varepsilon_n} \sigma \circ r_n$ abbildet, wobei $\varepsilon_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\rho = (\rho_n)_n$ eine Kettenabbildung definiert.

(b) Wir erinnern uns an die Zerlegung von $\Delta^n \times [0, 1]$ in Simplizes aus Vorlesung 8 (Punkt 3.1.10), derart, dass $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$ und $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$. Sei $s_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ die lineare Abbildung, die jeden singulären Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ auf

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i+\varepsilon_n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]}$$

abbildet, wobei $\pi: \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$ die Projektionsabbildung ist. Zeigen Sie:

$$d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = \rho_n - 1_{C_n(X)}.$$

- (c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass der Ring $H^*(X; R)$ graduiert kommutativ ist, d.h., dass für alle $\alpha \in H^n(X; R)$ und $\beta \in H^m(X; R)$ gilt:

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{|\alpha| \cdot |\beta|} \beta \smile \alpha.$$

★ 4 | Relatives $\smile$ -Produkt

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und X ein topologischer Raum sowie $A, B \subseteq X$ offen.

- (a) Bezeichne $C^n(X, A + B; R)$ die n -Koketten, die auf denjenigen singulären Simplexes verschwinden, die entweder vollständig in A oder vollständig in B enthalten sind. Benutzen Sie das 5-Lemma (Aufgabe 5 auf Übungsblatt 2) und Proposition 3.4.5 aus der Vorlesung, um zu zeigen: Die Inklusion $C^n(X, A \cup B; R) \hookrightarrow C^n(X, A + B; R)$ induziert einen Isomorphismus in Kohomologie.

- (b) Definieren Sie ein relatives $\smile$ -Produkt

$$H^n(X, A; R) \times H^m(X, B; R) \xrightarrow{\smile} H^{n+m}(X, A \cup B; R)$$

derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, A; R) \times H^m(X, B; R) & \xrightarrow{\smile} & H^{n+m}(X, A \cup B; R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X; R) \times H^m(X; R) & \xrightarrow{\smile} & H^{n+m}(X; R) \end{array}$$

Hierbei sind die vertikalen Abbildungen die durch die natürlichen Inklusionen $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$, $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, B)$, bzw. $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A \cup B)$ induzierten Homomorphismen.

- (c) Wir erinnern uns daran, dass die Einhängung ΣX von X aus dem Produkt $X \times [-1, 1]$ durch Zusammenschlagen der Teilräume $X \times \{\pm 1\}$ zu jeweils einem Punkt entsteht:

$$\Sigma X = (X \times [-1, 1]) / \sim, \quad \text{wobei} \quad (x, 1) \sim (y, 1) \quad \text{und} \quad (x, -1) \sim (y, -1) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass $a \smile b = 0$ für alle $a \in H^n(\Sigma X)$ und $b \in H^m(\Sigma X)$ mit $n, m > 0$.

★ 5 | Kreis mit zwei Einsen

Sei X der Quotient von $S^1 \times \{0, 1\}$ modulo der Äquivalenzrelation $\sim$, wobei

$$(e^{it}, a) \sim (e^{is}, b)$$

genau dann gilt, wenn $e^{it} = e^{is} \neq 1$, oder wenn $e^{it} = e^{is} = 1$ und $a = b$.

- (a) Zeigen Sie, dass X lokal euklidisch, zusammenhängend und kompakt ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und dass für alle $x \in X$ gilt

$$H_1(X, X \setminus \{x\}) \cong H_1(S^1),$$

- (b) Zeigen Sie, dass X orientierbar ist, jedoch nicht hausdorffsch.

- (c) Berechnen Sie $H_1(X)$.

Algebraische Topologie Frühjahrsübungen

1 | Poincaré in Dimension 3 und 4

- (a) Gibt es eine zusammenhängende, geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit X mit folgenden Homologiegruppen?

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_2(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_3(X) \cong \mathbb{Z}$$

- (b) Sei X eine zusammenhängende, geschlossene, orientierbare 4-Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik $\chi(X) = 4$ und $H^3(X) \cong 0$. Bestimmen Sie alle Homologie- und Kohomologiegruppen von X . Finden Sie ein Beispiel für X . *[Zusatzaufgabe: Finden Sie noch ein zweites Beispiel für X , das nicht nicht-homotopieäquivalent zum ersten ist.]*
- (c) Gibt es eine geschlossene 4-Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit ist?

2 | Abbildungskegel

Ist $f: (C, d) \rightarrow (C', d')$ eine Kettenabbildung, so ist ihr **Abbildungskegel** $(C(f), d_f)$ der durch

$$C(f)_n = C_{n-1} \oplus C'_n \quad \text{und} \quad (d_f)_n = \begin{bmatrix} -d_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d'_n \end{bmatrix}$$

definierte Kettenkomplex.

- (a) Verifizieren Sie, dass $(C(f), d_f)$ tatsächlich ein Kettenkomplex ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für zwei kettenhomotope Abbildungen f und g die Abbildungskegel $C(f)$ und $C(g)$ kettenisomorph sind.
- (c) Geben Sie durch Betrachtung eines geeigneten Abbildungskegels einen weiteren Beweis des Fünf-Lemmas (Aufgabe 5 auf Blatt 2).

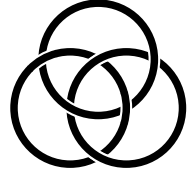
★ 3 | Rauf und runter

Sei Σ_g eine orientierbare Fläche von Geschlecht $g \geq 0$.

- (a) Berechnen Sie den Kohomologiering $H^*(\Sigma_g)$ für $g > 0$, indem Sie eine geeignete Abbildung $\Sigma_g \rightarrow \bigvee_g \Sigma_1$ betrachten.
- (b) Zeigen Sie, dass der Grad jeder stetigen Abbildung $\Sigma_h \rightarrow \Sigma_g$ gleich 0 ist, falls $0 \leq h < g$.

★ 4 | Erstaunlich langweilig: Homologie ist keine schlaue Knoteninvariante

Ein Link L ist das Bild einer glatten Einbettung einer endlichen Anzahl von Kreise in S^3 . Berechnen Sie alle Homologiegruppen von $S^3 \setminus L$.



Hinweis: Sie können dabei die aus der Differentialgeometrie bekannte Tatsache verwenden, dass L eine Tubenumgebung ν_L besitzt, d. h. eine offene Umgebung zusammen mit einem Homöomorphismus $\nu_L \cong S^1 \times \mathring{D}^2$, der L auf $S^1 \times \{0\}$ abbildet.

★ 5 | Noch eine Diagrammjagd

- (a) Betrachten Sie folgendes kommutative Diagramm abelscher Gruppen, in dem die beiden Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\gamma_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & C_n & \xrightarrow{\gamma_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \psi_{n+1} & & \downarrow 1_{A_n} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n & & \downarrow 1_{A_{n-1}} & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_{n+1} & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\eta_n} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & E_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\eta_{n-1}} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Finden Sie eine exakte Sequenz folgender Form

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \oplus D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Beweisen Sie Exaktheit.

- (b) Angenommen $X \subseteq Y \subseteq Z$ sind drei ineinander enthaltene topologische Räume. Benutzen Sie die exakte Sequenz aus Teil (a), um zu zeigen, dass es eine lange exakte Sequenz der folgenden Form gibt:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(Z, X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(Y, X) \oplus H_n(Z) \rightarrow H_n(Z, X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

- (c) Folgern Sie aus Teil (b), dass

$$H_n(Y) \cong H_n(Y, X) \oplus H_n(X) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

falls die Inklusion $X \hookrightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz ist.