

Topologie

Übungsblatt 1

★ 1 | Komplementäre Definitionen

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion zwischen zwei topologischen Räumen X und Y . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig.
- (b) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq Y$ ist abgeschlossen.
- (c) Für alle Teilmengen $M \subseteq X$ gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

★ 2 | Fixpunkte

Für eine Permutation f von $\{1, \dots, n\}$ sei $\text{NFix}(f)$ die Menge der Nichtfixpunkte von f . Zeigen Sie, dass durch

$$d(f, g) = \# \text{NFix}(f^{-1} \circ g)$$

eine Metrik d auf der Menge der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ definiert wird.

3 | Bewertungen

Sei p eine Primzahl. Für eine ganze Zahl $a \neq 0$ sei

$$v_p(a) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p^n \text{ teilt } a\}.$$

Für ganze Zahlen x und y sei

$$d_p(x, y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Dann ist d_p eine Metrik auf $\mathbb{Z}$.

Für die mathematische Allgemeinbildung: Die Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bezüglich dieser Metrik ist wieder ein Ring, der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p -adischen Zahlen. In diesem Kontext nennt man $v_p(a)$ die p -adische Bewertung von a .

4 | Endliche-Komplemente-Topologie

Zeigen Sie: Ist X eine Menge, so bilden alle Teilmengen von X , deren Komplemente endlich oder ganz X sind, eine Topologie auf X . Kann man in der obigen Definition „endlich“ durch „abzählbar“ ersetzen?

★ 5 | Identität und Auswertung

Sei F die Menge aller stetigen Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Durch

$$d_\infty(f, g) := \sup_x |f(x) - g(x)|$$
$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$$

werden zwei Metriken d_∞, d_2 auf F definiert. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen stetig sind:

- (a) $\text{id}: (F, d_\infty) \longrightarrow (F, d_2)$
- (b) $\text{id}: (F, d_2) \longrightarrow (F, d_\infty)$
- (c) $\text{ev}_0: (F, d_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; f \mapsto f(0)$
- (d) $\text{ev}_0: (F, d_2) \longrightarrow \mathbb{R}; f \mapsto f(0)$

6 | Vive la révolution: Ungleichungen für Gleichheit!

- (a) Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, seien

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

die Normen, die die Metriken d_1, d_2 und d_∞ induzieren durch $d_?(x, y) = \|x - y\|_?$. Zeigen Sie, dass die induzierten Topologien in $\mathbb{R}^2$ gleich sind.

- (b) Sei d eine Metrik eines Raums X . Zeigen Sie, dass

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine andere Metrik auf X definiert, die die gleiche Topologie wie d induziert.

Topologie

Übungsblatt 2

★ 1 | Klebelemma

Seien X ein topologischer Raum und $A_1, \dots, A_n \subset X$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen, die X überdecken, d.h.

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Seien außerdem ein topologischer Raum Y und stetige Abbildungen $f_i: A_i \rightarrow Y$ für $i = 1, \dots, n$, gegeben, sodass für alle i, j gilt

$$f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ existiert, die für alle $i = 1, \dots, n$ auf A_i mit f_i übereinstimmt.

2 | Topologien für Faule

Sei X eine Menge und B eine Menge von Teilmengen von X . Definieren Sie $\mathcal{T}_B$ als den Durchschnitt von allen Topologien, die B enthalten.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_B$ eine Topologie ist.
- (b) Beschreiben Sie die offenen Teilmengen von $\mathcal{T}_B$.
- (c) Geben Sie ein Beispiel für (X, B) an, bei dem B nicht *alle* endlichen Durchschnitte von Teilmengen aus B enthält, aber $\mathcal{T}_B$ nicht die diskrete Topologie ist.
- (d) Betrachten Sie die Menge $X = \mathbb{R}$ und B die Menge aller offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten:

$$B := \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Stimmt $\mathcal{T}_B$ mit der üblichen (euklidischen) Topologie auf $\mathbb{R}$ überein?

★ 3 | Gruppenartig

- (a) Ein **Isomorphismus** zwischen zwei Objekten X und Y einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ derart, dass ein Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ existiert mit $gf = 1_X$ und $fg = 1_Y$. Falls die Komposition zweier Morphismen

$$X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{r} X$$

gleich der Identität ist, d.h. $rs = 1_X$, dann nennt man r eine **Links-Inverse** (auch **Retraktion**) von s und s eine **Rechts-Inverse** (auch **Sektion**) von r . Angenommen, f ist ein Morphismus mit einer Links-Inversen g und einer Rechts-Inversen h . Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist und dass $g = h$ gilt.

- (b) Zeigen Sie außerdem Folgendes: Jede Gruppe G kann als eine Kategorie mit genau einem Objekt interpretiert werden. Umgekehrt X ein Objekt einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$, so erbt die Menge $\text{Aut}(X)$ der **Automorphismen** von X , d.h. die Teilmenge der Isomorphismen in $\mathcal{C}(X, X)$, eine Gruppenstruktur von $\mathcal{C}$.

★ 4 | Eindeutige Endstation

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $t \in \text{Ob } \mathcal{C}$ heißt **terminal**, falls es für jedes Objekt $a \in \text{Ob } \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $a \rightarrow t$ gibt. Zeigen Sie, dass terminale Objekte bis auf Isomorphie eindeutig sind, d.h., wenn t und t' zwei terminale Objekte in $\mathcal{C}$ sind, dann existiert genau ein Isomorphismus $t' \rightarrow t$. Untersuchen Sie außerdem, ob die folgenden Kategorien terminale Objekte besitzen:

- (a) Die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.
- (b) Die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen.
- (c) Die Kategorie der Mengen und injektiven Abbildungen.

5 | Transliteration

Seien $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ und $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ zwei Gruppenpräsentationen. Wir definieren das **freie Produkt von G_1 und G_2** durch

$$G_1 * G_2 := \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

Zeigen Sie, dass $G_1 * G_2$ (zusammen mit noch zu definierenden Homomorphismen $G_i \rightarrow G_1 * G_2$ für $i = 1, 2$) die universelle Eigenschaft des Koproducts von G_1 und G_2 erfüllt: Zu je zwei Gruppenhomomorphismen $t_1: G_1 \rightarrow T$ und $t_2: G_2 \rightarrow T$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $t: G_1 * G_2 \rightarrow T$ mit $ti_1 = t_1$ und $ti_2 = t_2$.

Des Weiteren sei $G = \langle S \mid R \rangle$ gegeben. Für jedes Diagramm $G_1 \xleftarrow{\varphi_1} G \xrightarrow{\varphi_2} G_2$ definieren wir das **amalgamierte Produkt**

$$G_1 *_G G_2 := \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{\varphi_1(s)\varphi_2^{-1}(s) \mid s \in S\} \rangle.$$

Zeigen Sie, dass diese Gruppe (zusammen mit entsprechenden Homomorphismen $G_i \rightarrow G_1 *_G G_2$ für $i = 1, 2$) die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt und somit unabhängig von den für G , G_1 und G_2 gewählten Präsentationen ist.

Für welche Gruppe G ist $G_1 *_G G_2 = G_1 * G_2$?

6 | Produkt oder nicht

Ist $\mathbb{R}$ ein nicht-triviales Produkt zweier topologischer Räume?

Topologie

Übungsblatt 3

1 | Nachgeklebt

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ mit $A \cup B = X$. Unter der Annahme, dass A, B abgeschlossen in X sind, verifizieren Sie, dass

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & X \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm ist. Stimmt die Aussage immer noch, wenn man „abgeschlossen“ durch „offen“ ersetzt? Was passiert, wenn man sowohl offene als auch abgeschlossene Mengen zulässt? Verallgemeinern Sie die Aussage für Überdeckungen von X durch unendlich viele Teilräume und untersuchen Sie, ob und unter welchen Bedingungen an die Teilräume (abgeschlossen, offen, oder beides) die verallgemeinerten Aussagen wahr sind.

2 | Topologie mit KI

KIs lernen auch gerade fleißig Topologie und machen sogar manchmal Übungen mit! Korrigieren Sie folgende von ChatGPT eingereichte Lösung für Aufgabe 1 auf Übungsblatt 1.

(a) $\Rightarrow$ (b). Ist f stetig, so ist für jede offene Menge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Sei nun $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $Y \setminus A$ offen und

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ist offen, also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(b) $\Rightarrow$ (c). Sei $M \subseteq X$ beliebig. Dann ist $\overline{M}$ der Abschluss von M , also die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Damit ist auch $f(M) \subseteq f(\overline{M})$.

Da $f(\overline{M})$ abgeschlossen ist und $f^{-1}(f(\overline{M}))$ wegen (b) ebenfalls abgeschlossen, folgt:

$$M \subseteq f^{-1}(f(M)) \subseteq f^{-1}(f(\overline{M})) \Rightarrow \overline{M} \subseteq f^{-1}(f(\overline{M}))$$

und daher:

$$f(\overline{M}) \subseteq f(f^{-1}(f(\overline{M}))) \subseteq \overline{f(M)}$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Sei $U \subseteq Y$ offen. Wir zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist.

Setze $M := f^{-1}(U)$. Dann ist $f(M) \subseteq U$, und nach Voraussetzung gilt:

$$f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{U} = U \Rightarrow \overline{M} \subseteq f^{-1}(U) = M \Rightarrow M = \overline{M}$$

also ist M abgeschlossen. Da $f^{-1}(U)$ abgeschlossen ist für jedes offene $U \subseteq Y$, folgt mit dem Komplementargument, dass f stetig ist.

3 | Der reelle projektive Raum

Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Der **reelle projektive Raum** $\mathbb{RP}^n$ ist definiert als Quotient von S^n nach der Äquivalenzrelation $x \sim -x$. Was ist $\mathbb{RP}^1$? Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{RP}^n$ auch als Quotienten der n -dimensionalen Kreisscheibe D^n nach der Äquivalenzrelation $x \sim -x$ für $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ schreiben lässt. Leiten Sie daraus ab, dass für alle $n \geq 1$ der projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ aus $\mathbb{RP}^{n-1}$ durch Anheften einer n -Zelle entsteht.

★ 4 | Globalisierung

Man nennt einen Raum X **lokal wegzusammenhängend**, wenn für jedes $x \in X$ und jedes Umgebung $U \ni x$ eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert, die wegzusammenhängend ist.

- (a) Beweisen Sie, dass ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum auch wegzusammenhängend ist.
- (b) Finden Sie einen Raum, der wegzusammenhängend, aber nicht *lokal* wegzusammenhängend ist.

★ 5 | Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$

Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$:

die Ebene $\Sigma := \{(0, x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$,
die Kugel $S^n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ und
den Punkt $\infty := (1, 0, \dots, 0)$.

Zeigen Sie, dass jede Gerade durch ∞ , die nicht parallel zu der Ebene Σ ist, die Kugel S^n genau in einem Punkt schneidet. Zeigen Sie, dass $S^n \setminus \{\infty\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie eine explizite Formel für Ihren Homöomorphismus an.

★ 6 | Nicht völlig zusammenhangslos

Gibt es eine abgeschlossene Teilmenge von S^1 , welche aus den Teilmengen $\{+z, -z\}$ jeweils genau einen Punkt enthält?

Topologie

Übungsblatt 4

1 | Welche Konstruktionen halten zusammen?

Seien X und Y zusammenhängende topologische Räume. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

- (a) Das Produkt $X \times Y$ ist zusammenhängend.
- (b) Die Summe $X + Y$ ist zusammenhängend.
- (c) Jeder Unterraum $A \subseteq X$ ist zusammenhängend.
- (d) Jeder Quotient $X/\sim$ ist zusammenhängend.
- (e) Jedes Pullback der Form $X \times_Z Y$ mit $Z \neq \{*\}$ ist zusammenhängend.
- (f) Jedes Pushout der Form $X +_Z Y$ mit $Z \neq \emptyset$ ist zusammenhängend.

Was passiert, wenn man — sowohl in der Voraussetzung als auch den Aussagen — „zusammenhängend“ durch „wegzusammenhängend“ ersetzt?

★ 2 | Determiniertes Vorzeichen

Zeigen Sie: Der Raum $GL_2(\mathbb{R})$ der invertierbaren reellen (2×2) -Matrizen besitzt genau zwei (wegzusammenhängende) Zusammenhangskomponenten.

3 | Scheibenkleister

Sei $D^n \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskreis. Der Quotient $\mathbb{R}^n/D^n$ ist zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph.

★ 4 | Kohomotopie

Seien $f, g: X \rightarrow S^n$ zwei Abbildungen mit $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f und g homotop sind.

5 | Dem Möbius sein Hut

Ist der Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ homotopieäquivalent zum Möbiusband? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ 6 | Verhopfte Ringe

- (a) Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Der **komplexe projektive Raum** $\mathbb{CP}^n$ ist analog zu $\mathbb{RP}^n$ (siehe Aufgabe 3 auf Übungsblatt 3) definiert als Quotient von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ nach der Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\iff (\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ with } |\lambda| = 1 \text{ such that } x = \lambda y).$$

Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{CP}^n$ auch als Quotienten einer $2n$ -dimensionalen Kreisscheibe D^{2n} schreiben lässt. Beschreiben Sie eine Zellstruktur auf $\mathbb{CP}^n$. Was ist $\mathbb{CP}^1$?

- (b) Zeigen Sie, dass das Urbild $\pi^{-1}(y)$ eines jeden Punktes $y \in \mathbb{CP}^1$ unter der Quotientenabbildung $\pi: S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^1 ist. Betrachten Sie die Komposition

$$f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\iota} S^3 \setminus \{\infty\} \subset S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^1,$$

wobei ι der Homöomorphismus aus Aufgabe 5 auf Übungsblatt 3 ist. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt $y \in \mathbb{CP}^1$ gibt, dessen Urbild $f^{-1}(y)$ eine Gerade g ist, und dass alle anderen Urbilder Kreise sind. Wie liegen diese Kreise in $\mathbb{R}^3 \setminus g$? Zeichnen Sie ein Bild davon.

Topologie

Übungsblatt 5

1 | Interpolation

- (a) Zeigen Sie, dass jede nichtleere konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist. *[Erinnern Sie sich daran, dass eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn für alle $x_0, x_1 \in X$ die gesamte Verbindungsstrecke von x_0 nach x_1 in X liegt.]*
- (b) Der **Kegel** $C(X)$ eines topologischen Raumes X ist definiert als der Quotientenraum

$$C(X) := X \times [0, 1] / X \times \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass $C(X)$ zusammenziehbar ist.

- (c) Zeige Sie, dass eine Abbildung $f: S^{n-1} \rightarrow X$ genau dann nullhomotop ist, wenn es eine Abbildung $g: D^n \rightarrow X$ gibt mit

$$f = g|_{S^{n-1}}.$$

★ 2 | Exoten

Sei $h: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ein Homöomorphismus und $\Sigma^n(h)$ der Pushout des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ \downarrow h & & \downarrow \\ S^{n-1} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & \Sigma^n(h) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $\Sigma^n(h)$ homöomorph zu S^n ist. (Übrigens hat Milnor 1959 bewiesen, dass es Diffeomorphismen h gibt, so dass $\Sigma^n(h)$ nicht *diffeomorph* zu S^n ist; in diesem Fall wird $\Sigma^n(h)$ als **exotische Sphäre** bezeichnet.)

3 | Einsiedler und Globalisierungsgegner

In einem Hausdorff-Raum sind Einpunktmengen abgeschlossen. Ist umgekehrt jeder Raum, in dem Einpunktmengen abgeschlossen sind, hausdorffsch? Wenn jeder Punkt eines Raumes eine hausdorffsche Umgebung besitzt, ist der gesamte Raum dann hausdorffsch?

★ 4 | Praktische Diagonale

Sei X ein topologischer Raum und $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ die Diagonale. Zeigen Sie: X ist genau dann hausdorffsch, wenn Δ abgeschlossen ist.

★ 5 | Potente Antipoden

- (a) Konstruieren Sie eine explizite Deformationsretraktion von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ auf S^n . Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Sei $a: S^n \rightarrow S^n$ die **Antipodenabbildung**, definiert durch $a(x) = -x$. Zeigen Sie, dass a homotop zur Identität ist, falls n ungerade ist.
- (c) Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine Abbildung, die nicht homotop zur Identität ist. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in S^1$ gibt mit $f(x) = -x$ und einen Punkt $y \in S^1$ mit $f(y) = y$. Was passiert, wenn wir S^1 durch S^n ersetzen?

6 | Grenzwertig

Sei $(X_n, f_n)_{n>0}$ eine Folge von topologischen Räumen und $f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ stetige Abbildungen. Der **direkte Limes** ist definiert als

$$X := \varinjlim X_n = \left(\bigsqcup_{n>0} X_n \right) / \sim$$

mit der co-induzierten Topologie, wobei $x \sim f_n(x)$ für alle $x \in X_n$, und $\sim$ die von diesen identifizierten Punkten erzeugte Äquivalenzrelation ist.

- (a) Beschreiben Sie die Topologie auf $X = \varinjlim X_n$: Wann ist eine Teilmenge $U \subseteq X$ offen?
- (b) Zeigen Sie, dass X zusammen mit den kanonischen Abbildungen $\iota_n: X_n \rightarrow X$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes erfüllt: Für jeden topologischen Raum Y und für jede Folge $(g_n: X_n \rightarrow Y)_{n>0}$ stetiger Abbildungen mit der Eigenschaft $g_{n+1} \circ f_n = g_n$ existiert genau eine stetige Abbildung $g: X \rightarrow Y$ derart, dass $g \circ \iota_n = g_n$ für alle $n > 0$ gilt.
- (c) Wir betrachten die Inklusionen

$$f_n: \mathbb{R}^n \supset S^{n-1} \hookrightarrow S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_n),$$

und definieren $S^\infty := \varinjlim S^n$.

Zeigen Sie, dass S^∞ hausdorffsch, aber nicht kompakt ist.

Topologie

Übungsblatt 6

1 | Null und nichtig

Welche der Aussagen ist wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

- (a) Ein topologischer Raum X ist zusammenziehbar genau dann, wenn jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für beliebiges Y , nullhomotop ist.
- (b) Ein topologischer Raum X ist zusammenziehbar genau dann, wenn jede Abbildung $f: Y \rightarrow X$, für beliebiges Y , nullhomotop ist.

2 | (Weg)zusammenhang als Funktor?

In der Vorlesung definierten wir zu einem gegebenen Punkt x eines topologischen Raumes X die Zusammenhangskomponente $Z(x)$ als die größte zusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält. Analog definierten wir die Wegzusammenhangskomponente $W(x)$ von x als die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält. Wir definieren nun die entsprechenden Quotientenräume $Z(X) := X / \sim_Z$ und $W(X) := X / \sim_W$ wobei

$$x \sim_Z y \Leftrightarrow Z(x) = Z(y) \quad \text{und} \quad x \sim_W y \Leftrightarrow W(x) = W(y).$$

Gibt es einen Funktor $Z: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, der jedem Objekt X den Quotienten $Z(X)$ zuordnet? Gibt es einen Funktor $W: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, der jedem Objekt X den Quotienten $W(X)$ zuordnet?

★ 3 | !

Angenommen, F ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen, mit der Eigenschaft, dass für homotope Abbildungen $f \simeq g: X \rightarrow Y$ gilt:

$$F(f) = F(g): F(X) \rightarrow F(Y).$$

Zeige, dass $F(A) \cong F(B)$ für homotopieäquivalente Räume A und B gilt.

4 | Aufgeplusteter Punkt

Zeigen Sie, dass der topologische Raum S^∞ , den wir in Aufgabe 6 des letzten Übungsblatts konstruiert hatten, zusammenziehbar ist.

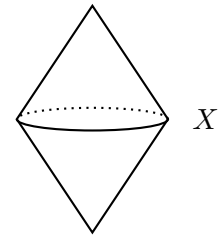
★ 5 | Loopy

Gegeben sei ein topologischer Raum X . Die **Einhängung** (englisch: Suspension) ist definiert durch

$$S(X) := X \times [-1, 1] / \sim,$$

wobei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation ist mit $(x, +1) \sim (y, +1)$ und $(x, -1) \sim (y, -1)$ für alle $x, y \in X$.

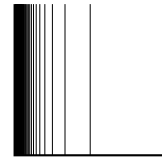
Angenommen nun, X ist wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass $S(X)$ einfach zusammenhängend ist, d. h. jede Schleife in $S(X)$ ist homotop zur konstanten Schleife.



★ 6 | Haarig

Sei C der **Kammraum**, der aus den Punkten der Ebene besteht

$$\left\{ (x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1 \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\} \cup \left\{ (0, y) \mid 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$



- Sei $x_0 = (0, 1)$ und $x_1 = (0, 0)$. Zeigen Sie, dass C relativ zum Basispunkt x_1 zusammenziehbar ist, aber nicht relativ zu x_0 . *[Erinnern Sie sich daran, dass relativ zur Basis z zusammenziehbar bedeutet, dass die Homotopien den Punkt z fixieren müssen.]*
- Bilden Sie nun einen Raum, indem Sie zwei Kopien von C nehmen und die beiden Punkte, die zu x_0 gehören, identifizieren. Ist dieser Raum zusammenziehbar (nicht notwendigerweise relativ zu einem Punkt)?

Topologie

Übungsblatt 7

★ 1 | Nordamerikanischer Briefkasten

Zeigen Sie, dass

$$D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I \subset D^n \times I$$

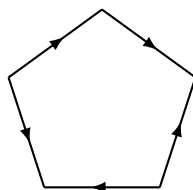
ein starker Deformationsretrakt von $D^n \times I$ ist, wobei $\partial D^n = S^{n-1}$ den Rand von D^n bezeichnet. Folgern Sie daraus das folgende Lemma: Falls zwei Abbildungen $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$ homotop sind, dann gilt

$$X \cup_f D^n \simeq X \cup_g D^n.$$

[Tipp: Finden Sie einen Raum Y , sodass $X \cup_f D^n \simeq Y \simeq X \cup_g D^n$.]

★ 2 | Dem Gimpels Cousin sein Hut

Nehmen Sie eine fünfeckige Fläche und kleben ihre fünf Kanten wie folgt zusammen:



Entscheiden Sie, ob dieser Raum zusammenziehbar ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

★ 3 | Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt:

Ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, das keine komplexe Wurzel hat, ist konstant.

Beweisen Sie diesen Satz mit topologischen Methoden wie folgt: Sei f ein Polynom vom Grad n , das als eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet wird. Nehmen Sie an, dass f keine Wurzeln hat. Dann kann eine Abbildung $g : S^1 \rightarrow S^1$ definiert werden durch

$$z \mapsto g(z) := \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Berechnen Sie $[g] \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ auf zwei Arten, um zu zeigen, dass $0 = [g] = n$.

[Tipp: Betrachten Sie die Funktion $z \mapsto g(r \cdot z)$ für $r \in \mathbb{R}$.]

4 | Produkte sind Produkte

Seien X und Y zwei Räume und $x \in X$ sowie $y \in Y$ zwei Basispunkte. Zeigen Sie, dass die Projektionen einen Isomorphismus induzieren

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Berechnen Sie die Fundamentalgruppe eines Torus.

5 | Möbius bastelt

- (a) Konstruieren Sie einen Raum, der sowohl einen Annulus als auch ein Möbiusband als starke Deformationsretrakte enthält.
- (b) Beweisen Sie, dass es keine Retraktion des Möbiusbandes auf seinen Rand gibt.
- (c) Nehmen Sie einen Annulus und schneiden ihn entlang einer Geraden zu einem Rechteck auf, drehen eine der beiden Schnittkanten um 360 Grad um die Längsachse und nähen die beiden Schnittkanten wieder zusammen. Ist das neue Band homöomorph zum Original?

6 | Freiheit den Schleifen!

Sei X ein wegzusammenhängender Raum, x einer seiner Punkte. Dann ist die vergessliche Abbildung

$$\pi_1(X, x) \rightarrow [S^1, X]$$

surjektiv. Zwei Elemente der Fundametalgruppe haben genau dann das gleiche Bild, wenn sie zueinander konjugiert sind.

Topologie

Übungsblatt 8

1 | Die Propositionen von Professor N. Aïve

Sei $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung zwischen zwei punktierten Räumen, die beide wegzusammenhängend sind, und sei $\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ der durch f induzierte Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\pi_1(f)$ ist injektiv, wenn f injektiv ist.
- (b) $\pi_1(f)$ ist surjektiv, wenn f surjektiv ist.
- (c) $\pi_1(f)$ ist ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.
- (d) Sei $X = Y = S^1$. Ist $\pi_1(f)$ injektiv, so ist f surjektiv.

2 | Zum Entspannen: Akupunktur

Zeigen Sie, dass für jede positive ganze Zahl n die Einhängung $S(S^n)$ der n -Sphäre homöomorph zur $(n+1)$ -Sphäre ist (siehe Aufgabe 5 auf Übungsblatt 6). Folgern Sie daraus, dass S^n für $n > 1$ einfach zusammenhängend ist. Zeigen Sie schließlich: Die reelle Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ist für keine positive ganze Zahl $n \neq 2$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

3 | ChatGPT plaudert beim Frisör

Korrigieren Sie die folgende Lösung, die ChatGPT zu Aufgabe 6b auf Übungsblatt 6 eingereicht hat.

Seien C_1 und C_2 zwei Kopien des Kammraums C . Wir definieren den Raum $X := C_1 \cup C_2 / \sim$, wobei $x_0^{(1)} \in C_1$ und $x_0^{(2)} \in C_2$ identifiziert werden, also $x_0^{(1)} \sim x_0^{(2)}$.

Behauptung: Der Raum X ist zusammenziehbar (ohne Fixpunktbedingung).

Begründung. Jede Kopie C_i ist für sich zusammenziehbar, da wir in Teil (1) gezeigt haben, dass C auf den Punkt $x_1 = (0, 0)$ zusammenziehbar ist. Betrachte die Homotopien

$$H_i : C_i \times [0, 1] \rightarrow C_i, \quad i = 1, 2,$$

die jeweils C_i auf den Punkt $x_1^{(i)}$ zusammenziehen. Da X durch Identifikation von $x_0^{(1)}$ und $x_0^{(2)}$ entsteht, ist X die Vereinigung zweier zusammenziehbarer Räume, deren Schnittmenge nur der gemeinsame Punkt x_0 ist. Es gilt der allgemeine Satz:

Ist A und B zusammenziehbar und ist $A \cap B$ zusammenziehbar (z. B. ein Punkt), so ist auch $A \cup B$ zusammenziehbar.

Hier ist $A = C_1$, $B = C_2$, und $A \cap B = \{x_0\}$, das trivial zusammenziehbar ist. Daher lässt sich eine Homotopie konstruieren, die X auf einen Punkt zusammenzieht, indem man zunächst C_1 und C_2 getrennt zusammenzieht und dann den Schnittpunkt fixiert. Also ist X zusammenziehbar.

★ 4 | Stetig vertauschbar

In Aufgabe 4 auf Übungsblatt 7 haben Sie gezeigt, dass für beliebige Räume X und Y die Projektionsabbildungen des Produkts $X \times Y$ einen Isomorphismus induzieren

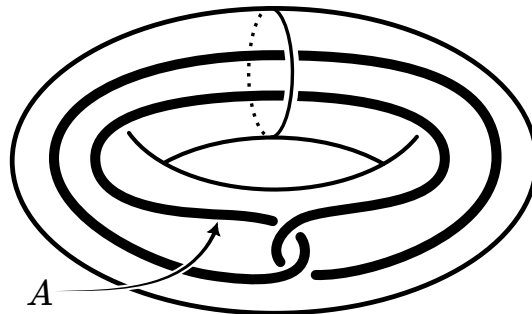
$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y),$$

wobei $x \in X$ sowie $y \in Y$ zwei beliebige Basispunkte sind. Insbesondere sagt uns dieser Isomorphismus, dass Schleifen in $X \times \{y\}$ und $\{x\} \times Y$ kommutierende Elemente von $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ repräsentieren. Beweise Sie diese Kommutatorrelation auf direkte Weise, indem Sie eine explizite Homotopie konstruieren. Illustrieren Sie Ihre Homotopie mit einem Bild im Beispiel der beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe vom Torus.

★ 5 | Vertrackt

Zeigen Sie, dass es in den folgenden Fällen keine Retraktionen $r: X \rightarrow A$ gibt:

- (a) $X = D^2 \times D^2$ und $A = \partial X = S^1 \times S^1$
- (b) $X = \mathbb{R}^3$ und A irgendein Teilraum, der homöomorph zu S^1 ist
- (c) $X = S^1 \times D^2$ und $A = \partial X = S^1 \times S^1$
- (d) $X = S^1 \times D^2$ und $A = \{x_0\} \times S^1$ mit x_0 ein beliebiger Punkt in S^1
- (e) $X = S^1 \times D^2$ und A das Bild der folgenden Einbettung von S^1 :



★ 6 | Lebesgue macht Kopfstand

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ für eine beliebige Indexmenge A eine offene Überdeckung von X . Definieren Sie eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exists \alpha \in A: U_\alpha \text{ enthält die } \varepsilon\text{-Umgebung } U_\varepsilon(x) \text{ von } x\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert derart, dass $f(x) > \delta$ für alle $x \in X$. Zeigen sie außerdem anhand eines konkreten Beispiels, dass die Aussage im Allgemeinen nicht stimmt, wenn X nicht kompakt angenommen wird.

[Tipp: Bilder von kompakten Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt.]

Topologie

Übungsblatt 9

1 | Maximale Freiheit, minimales Zentrum

Zeigen Sie, dass das freie Produkt $G * H$ zweier nicht-trivialer Gruppen G und H ein triviales Zentrum hat. Zeigen Sie außerdem, dass die Elemente endlicher Ordnung von $G * H$ genau die konjugierten Elemente endlicher Ordnung von G und H sind.

2 | Einerlei ab drei

Sei n eine positive ganze Zahl. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Wir hatten in Aufgabe 5 auf Blatt 3 gesehen, dass $S^n \setminus \{\infty\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Sei ι_n die Komposition

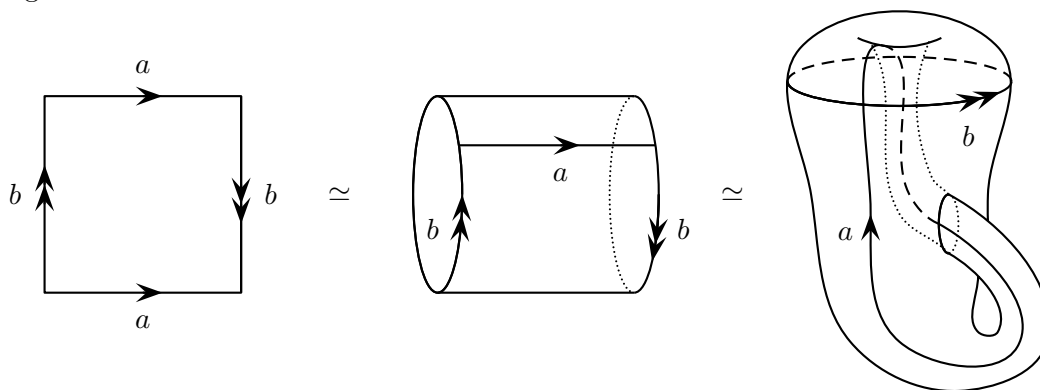
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} (S^n \setminus \{\infty\}) \hookrightarrow S^n.$$

Was können Sie sagen, ggf. in Abhängigkeit von n , über die induzierte Abbildung

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) \rightarrow \pi_1(S^n \setminus \iota_n(A))?$$

3 | Kleine Bastellei

Die Kleinsche Flasche wird durch das Identifizieren der Kanten eines Quadrats gemäß der folgenden Abbildung erhalten:



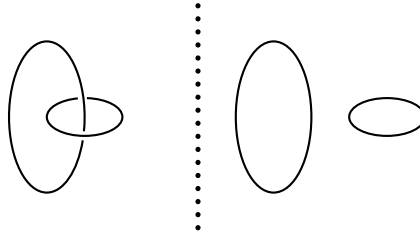
Berechnen Sie die Fundamentalgruppe dieses Raums.

★ 4 | Mikado

Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von n Geraden durch den Ursprung. Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

★ 5 | Hopf

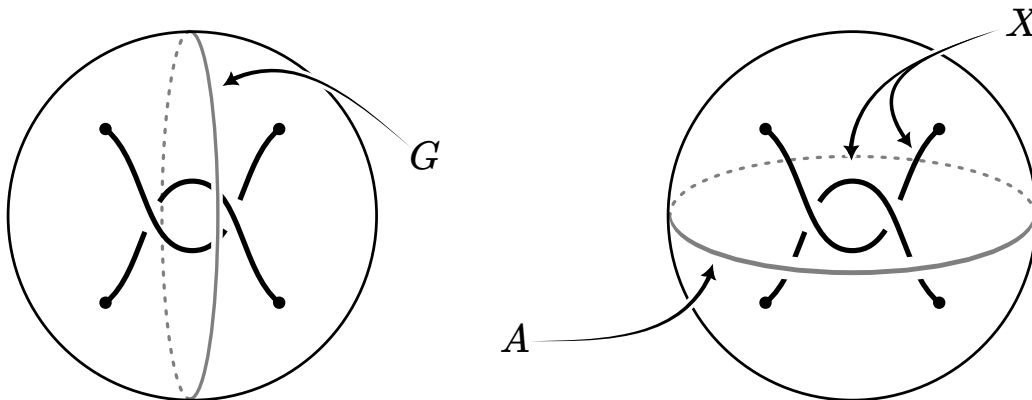
Betrachten Sie die beiden folgenden Anordnungen der Paare von Kreisen in S^3 . (Ich habe sie in $\mathbb{R}^3$ gezeichnet; fügen Sie einen Punkt im Unendlichen hinzu.)



Berechnen Sie die Fundamentalgruppen der Komplemente dieser Kreise und schließen Sie daraus, dass es keinen Homöomorphismus von S^3 auf sich selbst gibt, der eine Konfiguration auf die andere abbildet.

★ 6 | Seifert spielt mit Seifenblasen

Sei $X \subset D^3$ folgende Vereinigung von zwei eingebetteten Intervallen mit Endpunkten auf ∂D^3 , sowie G der folgende Großkreis auf $\partial D^3 = S^2$ und A der Äquator:



- Zeigen Sie, dass es keine Einbettung $f: D^2 \rightarrow (D^3 \setminus X)$ gibt, die ∂D^2 auf G abbildet.
- Zeigen Sie, dass es keine Einbettung $f: D^2 \rightarrow (D^3 \setminus X)$ gibt, die ∂D^2 auf A abbildet.
- Sei Σ_1 das Komplement einer eingebetteten offenen Kreisscheibe auf dem Torus $S^1 \times S^1$. Beschreiben Sie (etwa durch eine Zeichnung) eine Einbettung $f: \Sigma_1 \rightarrow (D^3 \setminus X)$, die $\partial \Sigma_1 = S^1$ auf A abbildet.
- Gibt es eine Einbettung $f: \Sigma_1 \rightarrow (D^3 \setminus X)$, die $\partial \Sigma_1$ auf G abbildet?

Topologie

Übungsblatt 10

1 | AI meint einerlei ab drei

Korrigieren Sie folgende Lösung der Aufgabe 2 auf Blatt 9, die ChatGPT eingereicht hat:

Sei n eine positive ganze Zahl und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Über die Einpunktkompaktifizierung erhalten wir die stetige Abbildung $\iota_n : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} S^n \setminus \{\infty\} \hookrightarrow S^n$. Wir betrachten die induzierte Abbildung auf Fundamentalgruppen:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) \longrightarrow \pi_1(S^n \setminus \iota_n(A)).$$

Fall $n \geq 3$. In diesem Fall ist der Einschluss $\mathbb{R}^n \setminus A \hookrightarrow S^n \setminus A$ eine Homotopieäquivalenz, da A kompakt ist und $n \geq 3$. Dies folgt aus einem klassischen Resultat der algebraischen Topologie: Für $n \geq 3$ und kompakte Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$, ist

$$\mathbb{R}^n \setminus K \simeq S^n \setminus K.$$

Insbesondere gilt also $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \pi_1(S^n \setminus \iota_n(A))$. Die induzierte Abbildung ist somit ein *Isomorphismus*.

Fall $n = 2$. Für $n = 2$ gilt dies im Allgemeinen nicht mehr. Ein einfaches Beispiel: Sei $A = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$, also $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, während $S^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2$, also $\pi_1(S^2 \setminus \{0\}) = 0$. Die induzierte Abbildung

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \pi_1(S^2 \setminus \{0\})$$

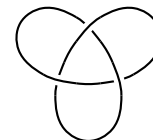
ist daher der Nullhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow 0$. Im Allgemeinen gilt also: Für $n = 2$ ist die Abbildung *nicht injektiv*, und im Allgemeinen auch *nicht surjektiv*.

Fall $n = 1$. In diesem Fall ist $\mathbb{R}^1 \setminus A$ eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (für endliches A), daher ist jede Zusammenhangskomponente einfach zusammenhängend, und die Fundamentalgruppe ist trivial. Hingegen ist $S^1 \setminus \iota_1(A)$ (z. B. für endlich viele Punkte) eine zusammenhängende, aber nicht einfach zusammenhängende Menge. Daher unterscheidet sich die Fundamentalgruppe im Allgemeinen, und die induzierte Abbildung ist nicht injektiv.

2 | Torusknoten

Seien p und q zwei teilerfremde ganze Zahlen. Betrachten Sie die Schleife γ in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$x = r \cos(p\varphi), \quad y = r \sin(p\varphi), \quad z = \cos(q\varphi) \quad \text{wobei } r = 2 + \sin(q\varphi).$$



Der Knoten, der durch die Schleife γ definiert wird, heißt (p, q) -Torusknoten $T_{p,q}$. Die Abbildung rechts zeigt den Torusknoten $T_{2,3}$. Berechnen Sie die Fundamentalgruppen der Komplemente von $T_{p,q}$.

[Tipp: Zerlegen Sie das Knotenkomplement entlang einer geeigneten Fläche in zwei Teile.]

3 | Pendere, pendo, pependi, pensum

König Charles III. möchte auf Schloss Balmoral ein Porträt seiner verstorbenen Mutter, Königin Elisabeth II., an einer alten Wand aufhängen. Da er um den schlechten Zustand des alten schottischen Gemäuers weiß, lässt er gleich zwei Nägel in die Wand schlagen und hängt dann das Bild mit einer Rundschnur auf, die er um beide Nägel herumwickelt. Selbst wenn einer der Nägel herausfallen sollte, wird das Bild – so zumindest seine Idee – trotzdem an der Wand bleiben, weil es ja noch vom anderen Nagel gehalten wird. Leider stellt sich der Herr König dabei so tollpatschig an, dass das Bild in jedem Fall von der Wand fällt, ganz gleich, welcher der beiden Nägel herausgezogen wird.

Beschreiben Sie alle möglichen Arten, wie Charles III. die Rundschnur um die beiden Nägel gelegt haben könnten, sodass das Bild in jedem Fall herunterfällt, sobald einer der Nägel entfernt wird.

★ 4 | Zu einfach

Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ die Vereinigung von n konvexen offenen Teilmengen $X_1, \dots, X_n$ mit der Eigenschaft, dass $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ für alle i, j, k gilt. Zeigen Sie dass X einfach zusammenhängend ist.

★ 5 | Die Fundamentalgruppe von Graphen

Ein Graph G ist ein eindimensionaler Zellkomplex mit möglicherweise unendlich vielen 0-Zellen und 1-Zellen. Ein Untergraph ist ein Unterzellkomplex eines Graphen. Ein Baum ist ein Graph, der kontrahierbar ist. Ein Baum T , der ein Untergraph eines Graphen G ist, heißt *maximal*, wenn T der einzige Untergraph von G ist, der T enthält.

- (a) Sei $T \subseteq G$ ein Baum. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $G \rightarrow G/T$ eine Homotopieäquivalenz ist und dass G/T ebenfalls ein Graph ist. [Tipp: Aufgabe 1 auf Blatt 7]
- (b) Schließen Sie daraus, dass jeder zusammenhängende Graph homotopieäquivalent zu einem Graphen mit genau einer 0-Zelle ist. [Tipp: Lemma von Zorn]
- (c) Beschreiben Sie die Fundamentalgruppe jedes zusammenhängenden Graphen.

★ 6 | Die Automorphismen des Torus

Sei $\text{Aut}(T^2, 0)$ die Gruppe von punktierten Automorphismen des punktierten Torus $(T^2, 0)$ bis auf Homotopie. Dann induziert der Funktor π_1 einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Aut}(T^2, 0) &\rightarrow GL_2(\mathbb{Z}) \\ [f: (T^2, 0) \rightarrow (T^2, 0)] &\mapsto (f_*: \pi_1(T^2, 0) \rightarrow \pi_1(T^2, 0)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus ist.

[Tipp: $GL_2(\mathbb{Z}) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) \subset \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$.]

Topologie

Übungsblatt 11

1 | Wenn das Negative fehlt

Die Abbildung

$$(0, \infty) \rightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}$$

ist keine Überlagerung.

2 | Symmetrien der Kleinschen Flasche

Sei K die Kleinsche Flasche. Zeigen Sie, dass K eine Fläche ist. Zu welcher Standardfläche (im Sinne der Klassifizierung von Flächen aus der Vorlesung) ist K homöomorph?

Aus Aufgabe 3 des 9. Übungsblatts ist bekannt, dass $\pi_1 K = \langle a, b \mid a^{-1}bab \rangle$. Sei Σ_3 die symmetrische Gruppe auf drei Elementen. Berechnen sie alle Homomorphismen $\pi_1 K \rightarrow \Sigma_3$.

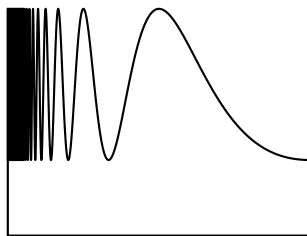
Zwei Abbildungen $f, g: \pi_1 K \rightarrow \Sigma_3$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $c \in \Sigma_3$ gibt mit $f(x) = cg(x)c^{-1}$ für alle $x \in \pi_1 K$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie alle Konjugationsklassen von Homomorphismen $\pi_1 K \rightarrow \Sigma_3$.

3 | Seifert und van Kampen in Warschau

Betrachten Sie die Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$, die man aus dem Graphen der Funktion

$$(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(\pi/x)$$

durch Vereinigung mit der Menge $(\{0\} \times [-2, 1]) \cup ([0, 1] \times \{-2\}) \cup (\{1\} \times [-2, -1])$ erhält:



Zeigen Sie, dass C wegzusammenhängend ist und die Ebene in zwei abgeschlossene Teilmengen A und B unterteilt mit $A \cup B = \mathbb{R}^2$ und $A \cap B = C$. Folgern Sie daraus, dass die Version des Satzes von Seifert-van-Kampen für abgeschlossene Teilmengen im Allgemeinen falsch ist, wenn man die Bedingung, dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ gute Paare sind, weglässt.

★ 4 | Überlagerungen mögen keine Extreme

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2 . Zeigen Sie: f ist keine Überlagerung.

★ 5 | Basiswechsel von Überlagerungen

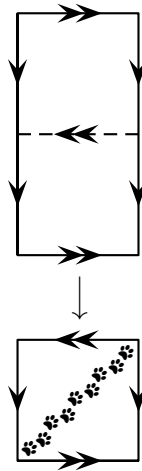
Sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Sei $f: A \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie das Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*X & \longrightarrow & X \\ f^*p \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Zeigen Sie: $f^*p: f^*X \rightarrow A$ ist eine Überlagerung.

★ 6 | Torus 2:1 Klein

Hier ist eine Überlagerung der Kleinschen Flasche durch einen Torus:



Geben Sie die Abbildungsvorschrift dieser Abbildung an und berechnen Sie den induzierten Homomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen.

Auf der Kleinschen Flasche hat ein Tier seine Spuren hinterlassen. Geben Sie den Weg an, den das Tier genommen hat und finden Sie alle Hochhebungen dieses Weges. Zeichnen Sie diese Hochhebungen auf der üblichen Darstellung des Torus als Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Topologie

Übungsblatt 12

1 | Universelle Bastellei

Geben Sie die universellen Überlagerungen der folgenden Räume an:

(a) $S^1 \vee S^2$

(b) $\mathbb{R}P^2 \vee S^2$

(c) $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$

Illustrieren Sie jedes Beispiel mit einem Bild.

2 | Reisetipp: A Coruña — Christchurch

Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $f: S^2 \rightarrow S^1$ gibt mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$.

3 | Asphärisch

Zeigen Sie, dass sich jede Abbildung $f: S^n \rightarrow T^2$ für $n > 1$ zusammenziehen lässt.

★ 4 | Punkte Hochheben

Führen Sie den Beweis des Hochhebungskriteriums zuende.

Genauer: Seien $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Abbildung mit $\text{im } f_* \subseteq \text{im } p_*$.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{f} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Definieren Sie eine Abbildung $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ von Mengen (!), indem Sie zu jedem $y \in Y$ einen Pfad $\gamma: y_0 \rightsquigarrow y$ wählen und dann $\tilde{f}(y)$ gleich dem Endpunkt der Hochhebung von $f \circ \gamma$ bei $\tilde{x}_0$ setzen. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ wohldefiniert ist.

★ 5 | Decktrafos

Sei X ein Hausdorff-Raum und G eine Gruppe, die auf X durch Homöomorphismen wirkt. Angenommen, diese Gruppenwirkung ist frei (d. h. wenn $g.x = x$ für $x \in X$ und $g \in G$, dann ist $g = e$) und hat zudem die folgende Eigenschaft: $\forall x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \ni x$, so dass die Menge $\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist.

- (a) Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $p: X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung definiert.
- (b) Schließen Sie daraus, dass, falls X einfach zusammenhängend und wegzusammenhängend ist, für jeden Punkt $[x] \in X/G$ ein Gruppenisomorphismus $\pi_1(X/G, [x]) \simeq G$ existiert.
- (c) Zeigen Sie schließlich, dass es für ungerades $n \geq 2$ und jedes $m \geq 2$ einen Raum X gibt, dessen Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}/m$ ist und dessen universelle Überlagerung S^n ist.

★ 6 | Spezielle Bastellei

Betrachten Sie $X = S^1 \vee S^1$ mit dem Wedge-Punkt x_0 als Basispunkt. Dann gilt nach Seifert-van-Kampen $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b \rangle$, wobei a und b die beiden Schleifen sind, die jeweils um einen der beiden Kreise verlaufen. Beschreiben Sie die Überlagerungen, die den folgenden Untergruppen entsprechen:

- (a) $\langle\langle ab \rangle\rangle$, die von ab normal erzeugte Untergruppe,
- (b) $\langle ab \rangle$, die von ab erzeugte Untergruppe,
- (c) der Kern des Homomorphismus $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/6$, definiert durch $\varphi(a) = [2]$ und $\varphi(b) = [3]$.

Topologie

Übungsblatt 13

★ 1 | Bestellei II

Betrachten Sie den zweidimensionalen Zellkomplex Y , der aus X aus Aufgabe 6 auf Übungsblatt 12 entsteht, indem man zwei 2-Zellen entlang der Schleifen der Homotopieklassen a^2 und b^2 anheftet. Dann gilt

$$\pi_1(Y, x_0) = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle.$$

- (a) Konstruieren Sie die Überlagerung von Y , die der Präsentation $\langle a \mid a^2 \rangle$ entspricht.
- (b) Konstruieren Sie die Überlagerung von Y , die dem Kern des Homomorphismus

$$\varphi: \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto 1, \quad b \mapsto 0$$

entspricht. Schließen Sie daraus, dass $\ker(\varphi)$ isomorph zu $\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$ ist.

★ 2 | Die Freiheit der Graphen

Ein Graph G ist ein eindimensionaler Zellkomplex mit möglicherweise unendlich vielen 0- und 1-Zellen. Ein *Untergraph* ist ein Unterkomplex eines Graphen. Ein *Baum* ist ein Graph, der zusammenziehbar ist. Ein Baum T , der ein Untergraph eines Graphen G ist, heißt *maximal*, wenn T der einzige Untergraph von G ist, der T enthält.

- (a) Sei $T \subseteq G$ ein Baum. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $G \rightarrow G/T$ eine Homotopieäquivalenz ist und dass G/T ebenfalls ein Graph ist. [*Hinweis: Aufgabe 1 auf Übungsblatt 7 könnte nützlich sein.*] Schließen Sie daraus, dass jeder zusammenhängende Graph homotopieäquivalent zu einem Graphen mit genau einer 0-Zelle ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines Graphen mit genau einer 0-Zelle eine freie Gruppe mit einem Erzeuger für jede 1-Zelle ist. Schließen Sie daraus, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe ebenfalls frei ist.
- (c) Konstruieren Sie eine Untergruppe von $\langle a, b \mid \rangle$ vom Index 3. Diese wird nach (b) eine freie Gruppe sein. Wie viele Erzeuger hat diese?

Tipp: Konstruieren Sie eine geeignete Überlagerung von $S^1 \vee S^1$.

★ 3 | Univalent

Seien $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ universelle Überlagerungen wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Räume X und Y . Zeigen Sie: Sind (X, x_0) und (Y, y_0) homotopieäquivalent, so sind auch $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und $(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ homotopieäquivalent.

Hinweis: Die analoge Aussage für nicht punktierte Räume gilt ebenfalls.

4 | Unendlich asphärisch

Sei Σ eine kompakte Fläche, die nicht homöomorph zur S^2 oder $\mathbb{R}P^2$ ist. Zeigen Sie, dass die universelle Überlagerung von Σ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist. Folgern Sie daraus, dass sich jede Abbildung $f: S^n \rightarrow \Sigma$ für $n > 1$ zusammenziehen lässt.

Tipp: S^2 und $\mathbb{R}P^2$ sind die einzigen kompakten Flächen, die eine endliche Fundamentalgruppe haben.

5 | Zerfasert

Sei G eine Gruppe. Eine G -Menge ist eine Menge zusammen mit einer Wirkung von G auf ihr. Ein Morphismus von G -Mengen ist eine Mengenabbildung, die mit den Wirkungen von G verträglich ist.

Sei nun (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Leiten Sie aus der topologischen Galois-Korrespondenz aus der Vorlesung folgende Variante dieser Korrespondenz ab:

Die Abbildung

$$\frac{\{\text{Überlagerungen von } X\}}{\text{Isomorphismus von Überlagerungen}} \longrightarrow \{\pi_1(X, x_0)\text{-Mengen}\}$$
$$[p] \longmapsto p^{-1}(x_0)$$

ist eine Bijektion.

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall wegzusammenhängender Überlagerungen. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Wirkung auf den Fasern transitiv ist. Was ist die Verbindung der Fasern zur Untergruppe im p_ ?*

6 | Überlagerungen der Kleinschen Flasche

Nutzen Sie Aufgabe 5, um alle 3-fachen (nicht notwendigerweise wegzusammenhängende) Überlagerungen der Kleinschen Fläche zu finden. Vergleichen Sie Ihre Antwort mit Ihrer Antwort zu Aufgabe 2 des 11. Übungsblatts.

Topologie Sommerübungen

1 | Überlagerungen von $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$

Bestimmen Sie alle wegzusammenhängenden Überlagerungen von $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ bis auf Isomorphie.

2 | F_2 und Überlagerungen

Konstruieren Sie alle Untergruppen der freien Gruppe auf zwei Erzeugern vom Index 6. Konstruieren Sie alle zugehörigen Überlagerungen.

3 | Reidemeister und Fox in der Färberei

Sei K ein Knoten und D ein Diagramm von K . Eine n -Färbung von D ist eine Abbildung

$$F: \{\text{Stränge in } D\} \rightarrow \mathbb{Z}/n$$

derart, dass gilt

- (a) Es gibt zwei Stränge s und s' in D mit $F(s) \neq F(s')$.
- (b) An jeder Kreuzung von D gilt: Ist s der Überstrang der Kreuzung und s' und s'' die beiden anderen Stränge, so gilt:

$$2 \cdot F(s) = F(s') + F(s'').$$

Sei ferner D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$:

$$D_n = \langle r, s \mid s^2, r^n, (sr)^2 \rangle.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung für ungerade Primzahlen n eine Bijektion ist

$$\begin{aligned} \{n\text{-Färbungen von } D\} &\longrightarrow \{\text{Epimorphismen } G(K) \twoheadrightarrow D_n\} \\ F &\longmapsto \left(g_s \mapsto sr^{F(s)} \right), \end{aligned}$$

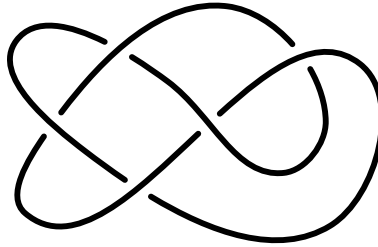
wobei g_s den Erzeuger der Wirtinger-Präsentation von $G(K)$ für den Strang s im Diagramm D bezeichnet.

4 | Nicht perfekt

Zeigen Sie, dass der Torusknoten $T_{3,5}$ für keine ungeraden Primzahlen n eine n -Färbung besitzt.

5 | Knotengruppe

Finden Sie eine Präsentation der Fundamentalgruppe des Komplements des folgenden Knotens.



Zeigen Sie, dass der Knoten nicht äquivalent zum Unknoten ist, indem Sie einen Epimorphismus in eine Diedergruppe angeben.

6 | Weil es so schön war

Berechnen Sie das Alexanderpolynom des Knotens in Aufgabe 5.