

Vorlesungszusammenfassungen

Topologie

Ruhr-Uni Bochum
Sommersemester 2025

1 Grundbegriffe

Di 08.04. | 1 | Motivation und Grundbegriffe [LS, Kapitel 1] [H, Chapter 0]

- Wiederholung und Vertiefung: Stetigkeit auf metrischen Räumen
- Definition: topologische Räume, offene Mengen, stetige Abbildungen
- Beispiele: durch Metriken induzierte Topologien, die diskrete Topologie, die Klumpentopologie
- Videoempfehlung  3Blue1brown: *This open problem taught me what topology is*

Do 10.04. | 2 | Die Kategorie der topologischen Räume [LS, Kapitel 1] [H, Chapter 0]

- Definition: abgeschlossene Mengen, Abschlüsse, dichte Teilmengen
- Die Sprache der Kategorien; diverse Beispiele: Top, Grps, AbGrps, Sets, die Topologien-Kategorie, die Pfeile-Kategorie $Arrow(\mathcal{C})$, etc.
- Wann sind zwei Objekte „gleich“? Isomorphismen in Kategorien
- Warnung: Nicht alle bijektiven stetigen Abbildungen sind Homöomorphismen!
- Motivation und Definition: Die induzierte Topologie

Di 15.04. | 3 | Aus alt wird neu: die induzierte Topologie [LS, 2.1+2.2]

- Die Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie
- Die Unterräume, Produkte und Faserprodukte (aka Pullbacks) und ihre universellen Eigenschaften

Do 17.04. | 4 | Uen driw tla sua: die coinduzierte Topologie [LS, 2.3+2.4]

- Die co-induzierte Topologie und ihre universelle Eigenschaft
- Beispiele: Die Quotiententopologie und Summen
- Beispiele für topologische Räume: Sphären, Kegel, Annuli, Möbiusbänder, Tori, etc.

Di 22.04. | 5 | Pushouts und Zellkomplexe [LS, 2.4] [H, Seite 5]

- Pushouts (=amalgamierte Summen) und ihre universelle Eigenschaft
- Beispiel: (endliche) Zellkomplexe

Do 24.04. | 6 | Zusammenhang und Wegzusammenhang [H, 1.1] [LS, 2.3+2.4+6.1+6.2]

- Äquivalente Definitionen von Zusammenhang + Definition von Wegzusammenhang
- Satz: wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend
- Proposition: Bilder von (weg)zusammenhängenden Räumen sind (weg)zusammenhängend.
- Proposition: Vereinigungen von (weg)zusammenhängenden, paarweise nicht disjunkten Räumen sind (weg)zusammenhängend.
- Definition: (Weg)zusammenhangskomponenten eines Punktes

Di 29.04. | 7 | Homotopien

- Definition: (relative) Homotopie von Abbildungen
- Proposition: Homotopie ist eine Äquivalenzrelation
- Definitionen und Beispiele: Homotopieäquivalenz von Räumen; starke und schwache Deformationsretrakte; zusammenziehbare Räume
- Satz: Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Do 01.05. | ★ | Tag der Arbeit

Di 06.05. | 8 | Vertretungsvorlesung von Dr. Zhang: Compactness [LS, 4.1]

- definition: Hausdorff spaces
- theorem: A continuous bijection from a compact space to a Hausdorff space is a homeomorphism.
- One point compactification

Do 08.05. | 9 | Vertretungsvorlesung von Dr. Zhang: Compactness [LS, 4.2]

- definition: proper maps = closed maps whose fibres are compact
- Heine-Borel Theorem: A subspace of $\mathbb{R}^n$ is compact if and only if it is bounded and closed.
- Theorem of Tychonoff (without proof): Products of compact spaces are compact.

Di 13.05. | 10 | Die Homotopiekategorie und Funktoren [LS, 6.2][H, 1.1]

- Erinnerung: Homotopien
- Beispiel: Kreisring und Möbiusband sind homotopieäquivalent (Blatt 4, Übungsaufgabe 5)
- Homotopiekategorie und Funktoren
- Definition des Funktors π_0 und seine grundlegenden Eigenschaften (Verhalten unter Produkten, Summen, Surjektivität, Injektivität, Pushouts)

2 Die Fundamentalgruppe

Do 15.05. | 11 | Der Funktor π_1 [H, 1.1]

- Die Kategorie der punktierten Räume und π_1
- Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt

Di 20.05. | 12 | Die Fundamentalgruppe eines Kreises [H, 1.1]

- Definition: Einfach zusammenhängende Räume
- Satz: Die Fundamentalgruppe ist eine Homotopieinvariante
- Satz: $\Phi: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto (\gamma_n: t \mapsto e^{2\pi i t n})$ ist ein Isomorphismus.
- Korollar 1: Keine Retraktionen von D^2 auf den Rand
- Korollar 2: Brouwers Fixpunktsatz

Do 22.05. | ★ | Wegen Krankheit abgesagt

Di 27.05. | 13 | Das Hochhebungslemma [H, Beweis von Thm 1.7]

- Lemma über Hochhebungen entlang der Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$
- Beweis der Bijektivität von $\Phi: \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$

Do 29.05. | ★ | Christi Himmelfahrt

Di 03.06. | 14 | Ein bisschen Gruppentheorie [H, Einleitung von 1.2],[LS,]

- Freie Gruppen, Gruppenpräsentationen und ihre universellen Eigenschaften
- Summen und Pushouts von Gruppen

Do 05.06. | 15 | Der Satz von Seifert-van-Kampen [H, 1.2],[Ra, 5.1f]

- Der Satz von Seifert-van-Kampen (ohne Beweis, holen wir später nach)
- Beispiel: Fundamentalgruppen von Wedgeprodukten von Kreisen
- Korollar: Fundamentalgruppen von $X \cup_f D^n$ für $n > 1$
- Beispiel: Fundamentalgruppen vom 2-dimensionalen Torus

Di 10.06. | ★ | Pfingstferien

Do 12.06. | ★ | Pfingstferien

Di 17.06. | 16 | Klassifizierung von Flächen

[Ra, 5.3],[FW]

- Satz von Seifert-van-Kampen für abgeschlossene Teilräume
- Korollar: Jede endlich präsentierte Gruppe ist Fundamentalgruppe eines topologischen Raums. (Gilt auch ohne die Bedingung „endlich präsentiert“.)
- Beispiel: Fundamentalgruppen von Wedgeprodukten guter Paare
- Beispiel: Fundamentalgruppen von orientierbaren und nicht orientierbaren Flächen

Do 19.06. | ★ | Fronleichnam**Di 24.06. | 17 | Beweis von Seifert-van-Kampen**

[FW],[LS, 7.2],[H, 1.2]

- Satz: Klassifizierung von Flächen (Beweis unvollständig; siehe Conway's ZIP proof)
- Beweis von Seifert-van-Kampen für offene Mengen

3 Überlagerungen**Do 26.06. | 18 | Überlagerungen**

[Ra, 3.1],[H, 1.3]

- Überlagerungen, Hochhebungen, Hochhebungen von Wegen, Homotopien und Wegehomotopien
- Lemma: Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, so ist $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.
- Lemma über die Gruppenaktion von $\pi_1(X)$ auf $p^{-1}(x_0)$.

Di 01.07. | 19 | Ein nützliches Kriterium für Hochhebungen

[Ra, 3.1],[H, 1.3]

- Universelle Überlagerungen und eine Identifizierung von $\pi_1(X, x_0)$ mit $p^{-1}(x_0)$.
- Beispiel: Berechnung von $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ für $n > 1$ über universelle Überlagerungen
- Definition: schön = wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend
- Kriterium: Sei Y schön und p eine Überlagerung. Dann gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \exists \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array} \right) \iff \text{im } p_* \supseteq \text{im } f_*.$$

Falls $\tilde{f}$ existiert, ist es eindeutig.

Do 03.07. | 20 | Die Galois-Korrespondenz I

[Ra, 3.4],[H, 1.3]

- Korollar: Zwei punktierte und schöne Überlagerungen sind homöomorph, wenn ihre Untergruppen übereinstimmen.
- Konstruktion von universellen Überlagerungen von Zellkomplexen an Beispielen
- Die Galois-Korrespondenz (ohne Beweis der Surjektivität)
- Beispiel: Alle zusammenhängenden Überlagerungen vom Kreis
- Beispiel: Die Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ erzeugt von dem Kommutator der Standarderzeuger und von der Kommutatorgruppe

Di 08.07. | 21 | Die Galois-Korrespondenz II

[Ra, 3.4],[H, 1.3]

- Galois-Korrespondenz für nichtgepunktete Räume
- Konstruktion für Zellkomplexe (ohne Beweis der Überlagerungseigenschaft)

Do 10.07. | 22 | Decktransformationen

[H, 1.39]

- Berechnung von Deck-Transformationsgruppen
- Beispiel: Decktrafos auf Überlagerung zu $\langle a \rangle \triangleleft \langle a, b \rangle = \pi_1(S^1 \vee S^1)$

Anwendungen¹**Di 15.07. | 23 | Die Knotengruppe (Achtung: Vorlesung findet asynchron auf Moodle statt!)**

[H, Section 1.2, exercise 22+p. 55]

- Beispiele zur Decktransmutationsgruppe
- Die Wirtinger-Präsentation von Knotengruppen
- Die Abelianisierung ist zyklisch.
- Unterscheidung von (Knoten-)Gruppen über Darstellungen in endliche Gruppen

Do 17.07. | 24 | Die maximale Abelsche Überlagerung von Knotenkomplementen

[L, Section 2+6+7],[Ro, 7.D]

- Abstrakte Beschreibung mit Decktrafo
- Konkrete Beschreibung über Seifertflächen
- Eine Präsentation der Kommutatorgruppe und ihrer Abelianisierung als $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul
- Definition und Satz (ohne Beweis): Das Alexanderpolynom ist wohldefiniert bis auf Multiplikation mit einer Einheit in $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$

¹Die letzten beiden Vorlesungen sind als Ausblick gedacht und nicht prüfungsrelevant.

Literatur

- [LS] Gerd Laures und Markus Szymik:  Grundkurs Topologie (Deutsch)
- [F] Stefan Friedl:  Topology Lecture Notes (Englisch)
- [H] Allen Hatcher:  Algebraic Topology (Englisch)
- [Ra] Oscar Randal-Williams:  Algebraic Topology (lecture notes) (Englisch)
- [L] Raymond Lickorish:  An Introduction to Knot Theory (Englisch)
- [Ro] D. P. O. Rolfsen,  Knots and links, corrected reprint of the 1976 original, Mathematics Lecture Series, 7, Publish or Perish, Houston, TX, 1990
- [FW] George K. Francis und Jeffrey R. Week:  Conway's ZIP proof (Englisch) via Andrew Ranickis Webseite