Vorlesung 9:

Neuer Klausurtermin!
(siehe GRIPS-Nachricht vom 7. Dezember)

... letzte Woche...

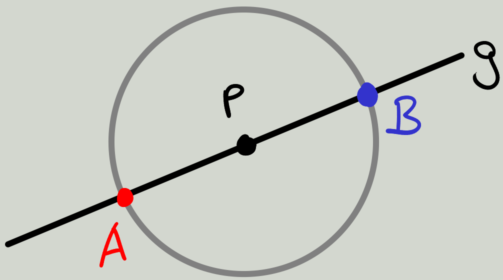
Lote fällen bzw. errichten

Satz: (Vorlesung 8)

Zu jeder Geraden g und Punkt P in $\mathbb{E}$ gibt es genau eine Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch P geht.

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1) $P \in g$: "Lot errichten"



Behauptung:

Lot von P auf g = Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$

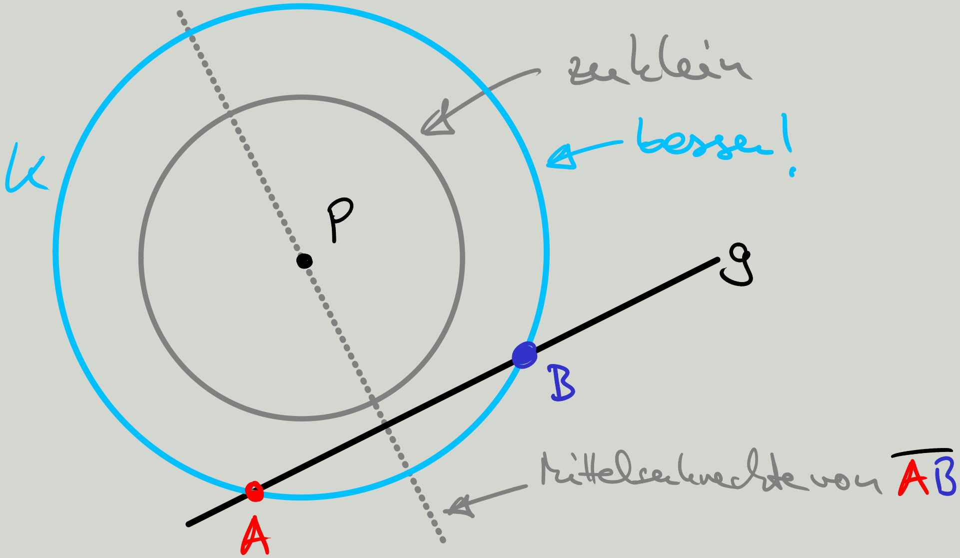
Das folgt aus:

Satz: (Vorlesung 8)

Zu $A, B \in \mathbb{E}$ mit $A \neq B$ ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ gegeben durch

$$\{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{QA}) = \ell(\overline{QB})\}.$$

2) $P \notin g$: "Lot fällen"



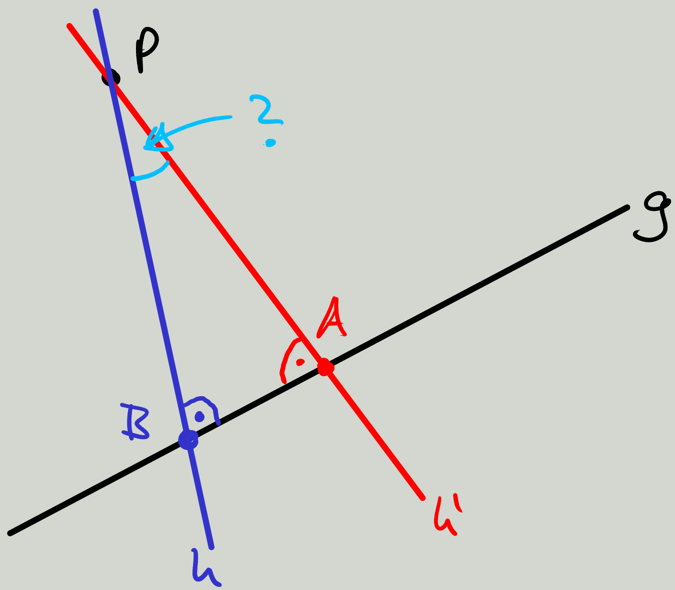
(2) Schlage Kreis K um P mit ausreichend großem Radius derart, dass K die Gerade g in zwei Punkten schneidet.

Rest der Konstruktion + Beweis wie bei 1)

Frage: Ist das Lot eindeutig?

zu 1) Ist $P \in g$, so legt der rechte Winkel bei P das Lot h bereits eindeutig fest.

zu 2) Ist $P \notin g$, nehme an, h und h' seien zwei Lote von P auf g.

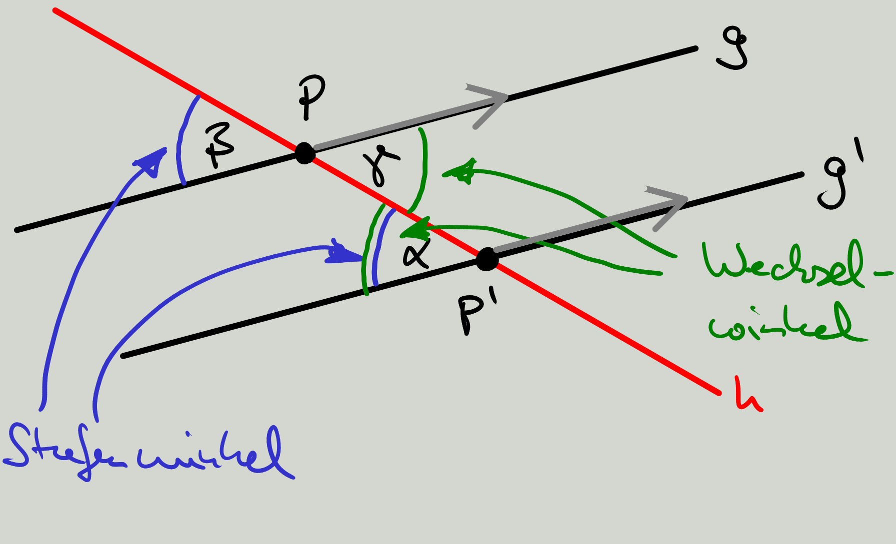


Ist $h = h'$, so ist der Winkel $\measuredangle$ bei P größer als 0. Also wäre die Summe der Innenwinkel von $\triangle PBA$ größer als 180°, im Widerspruch zu

Innenwinkelsatz:
Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist gleich π.

Zu dem Beweis dieses Satzes brauchen wir:

Definition:
Seien $g \neq g'$ zwei Geraden sowie h eine Gerade, die g bzw. g' in dem Punkt P bzw. P' schneidet. Definiere:



Wechsel- und Stufenwinkelsatz

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) g und g' sind parallel.

(2) Die Stufenwinkel sind gleich, d.h. $\alpha = \beta$.

(3) Die Wechselwinkel sind gleich, d.h. $\alpha = \gamma$.

Beweis:

Die Winkel γ und β sind Scheitelwinkel, und daher gleich. Also $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \gamma$, d.h. $(2) \Leftrightarrow (3)$.

Es reicht zu zeigen $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Betrachte dazu die Verschiebung:

$$\tau := \tau_{P-P'}.$$

Diese bildet P' auf P ab sowie h (als Menge) auf sich selbst.

Ist g parallel zu g', dann gilt

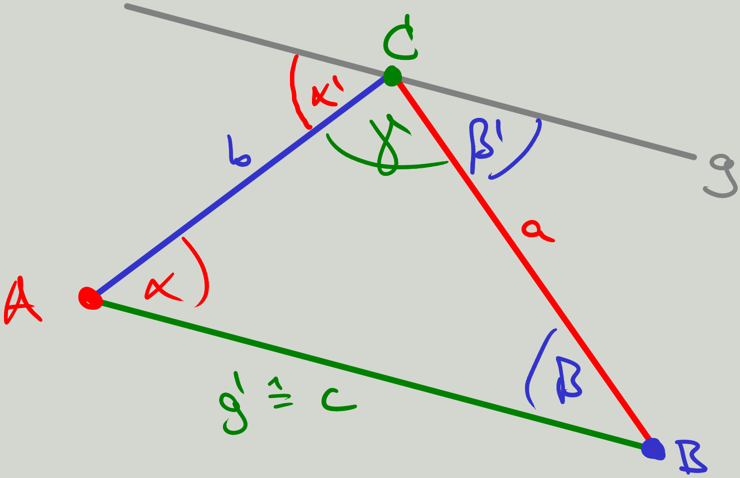
$$\tau(g') = g$$

$\tau(\text{"}\alpha\text{"}) = \text{"}\beta\text{"}$ und Bewegungen erhalten

Winkel, also folgt $\alpha = \beta$.
Ist $\alpha = \beta$, so ist $\tau(g') = g$
also ist g parallel zu g'. $\blacksquare$

Beweis vom Innenwinkelsatz:

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck.

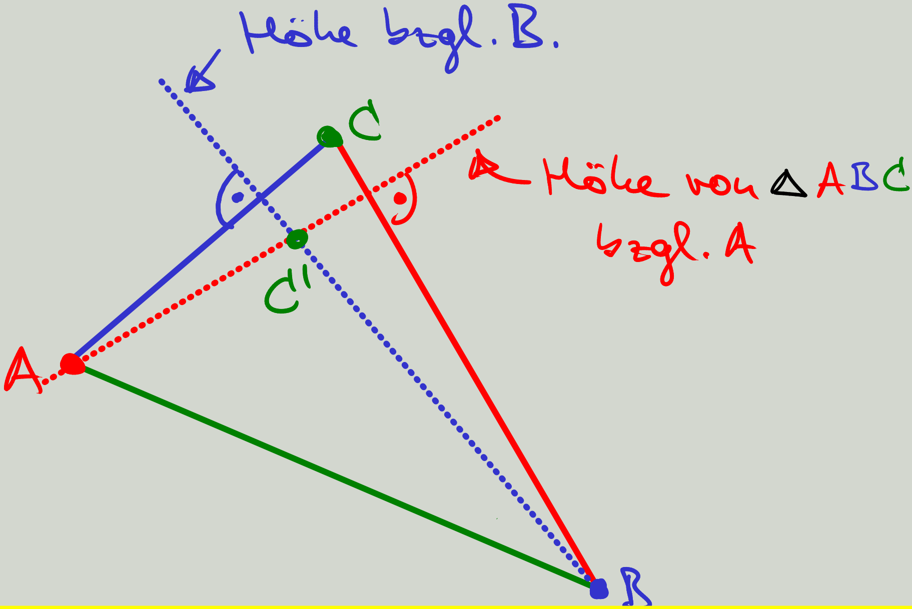


Sei g die (eindeutige) Gerade durch C, die parallel ist zu der Seite c.
Nach Wechselwinkelsatz gilt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Also folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = \pi. \qquad \blacksquare$$

Definition:

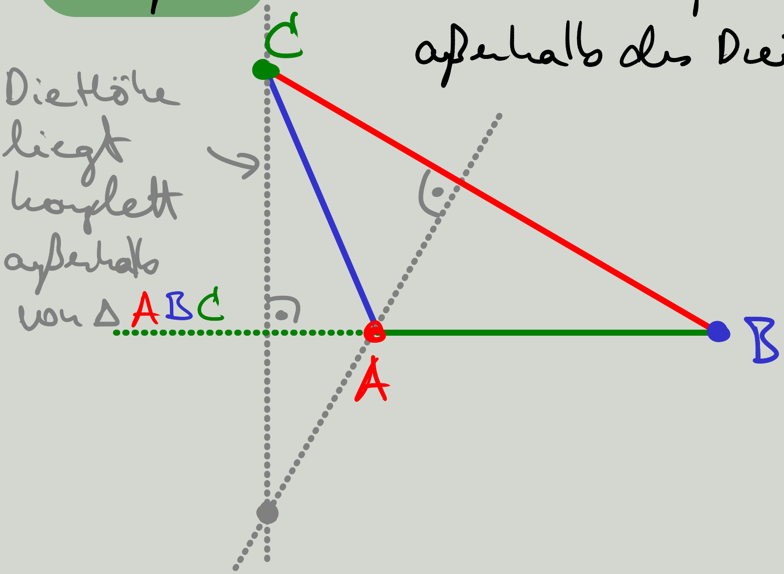
Das Lot eines Eckpunktes P eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite heißt <u>Höhe</u> des Dreiecks bzgl. P.



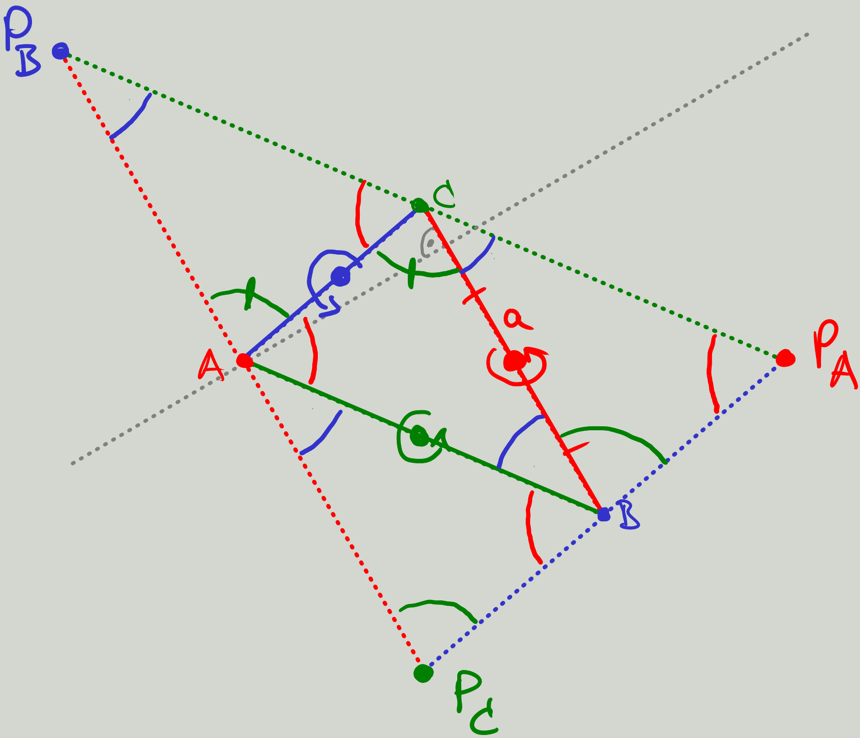
Satz:

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt, den Höhenschnittpunkt,

Beispiel: Der Höhenschnittpunkt kann außerhalb des Dreiecks liegen.



Beweis des Satzes:



Mache drei Kopien von $\triangle ABC$, rotiere sie um π und klebe sie an die drei Seiten von $\triangle ABC$.

(Formaler: Wende auf $\triangle ABC$ drei Rotationen um die Mittelpunkte der drei Seiten um π an.)

Seien P_A, P_B und P_C die neu konstruierten Punkte.

Behauptung 1: $A \in \overline{P_C P_B}$

◀ Die Summe der Winkel $\sphericalangle$, $\sphericalangle$ und $\sphericalangle$ ist nach Innenwinkelsatz gleich π. Also gilt

$$\overline{P_C P_B} = \overline{P_C A} \cup \overline{A P_B}. \quad ▶$$

Behauptung 2: A ist Mittelpunkt von $\overline{P_C P_B}$.

◀ Nach Konstruktion gilt

$$\ell(\overline{P_C A}) = \ell(a) = \ell(\overline{A P_B}) \quad ▶$$

Behauptung 3: a ist parallel zu $\overline{P_C P_B}$.

◄ Wechselwinkelsatz. ►

Beobachtung: Höhen von $\triangle ABC$ sind die Mittelsenkrechten von $\triangle P_A P_B P_C$.

Also folgt
Schnittpunkte der Höhen von $\triangle ABC$

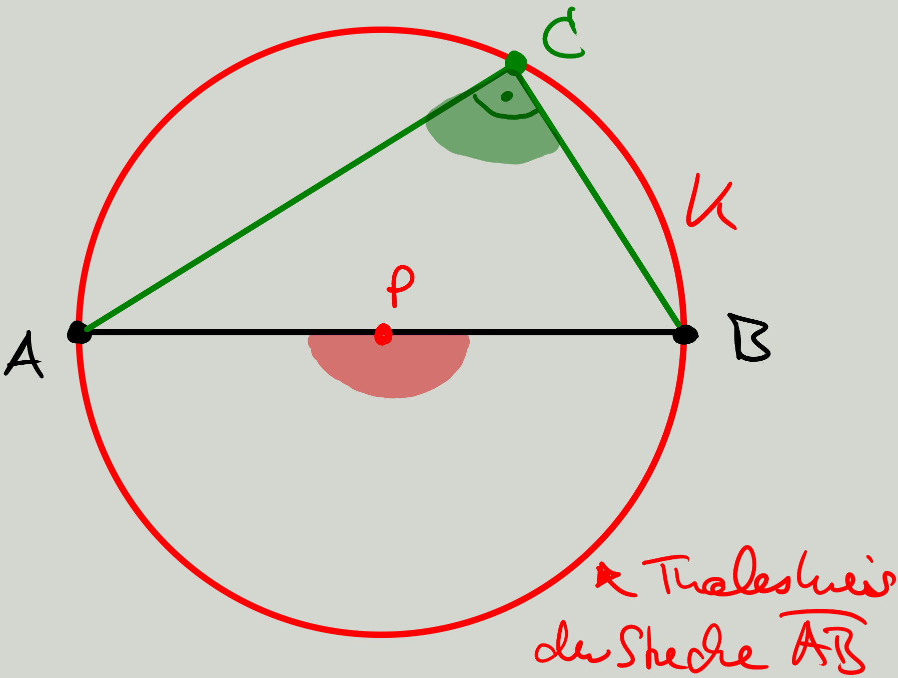
= Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von $\triangle P_A P_B P_C$.

Nach dem Satz aus der letzten Vorlesung, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. ∎

Anwendung des Innenwinkelsatzes

Satz des Thales:

Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises K. Dann gilt für jeden Punkt C auf K: ΔABC ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.



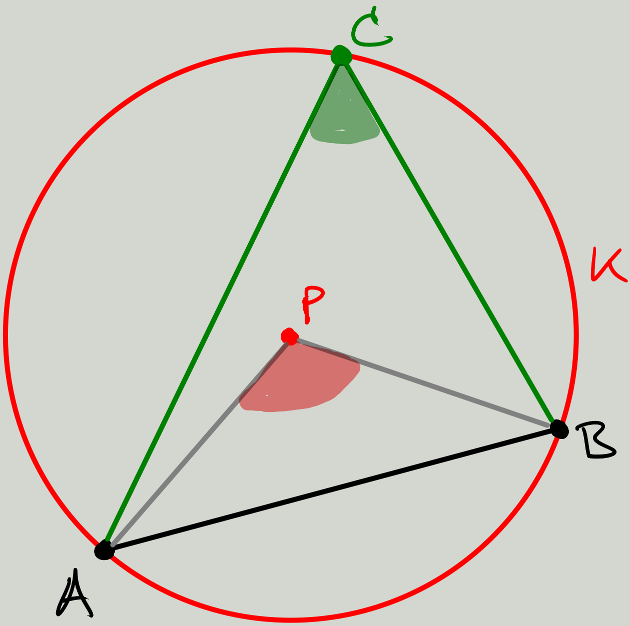
Allgemeiner gilt:

Peripheriewinkelsatz:

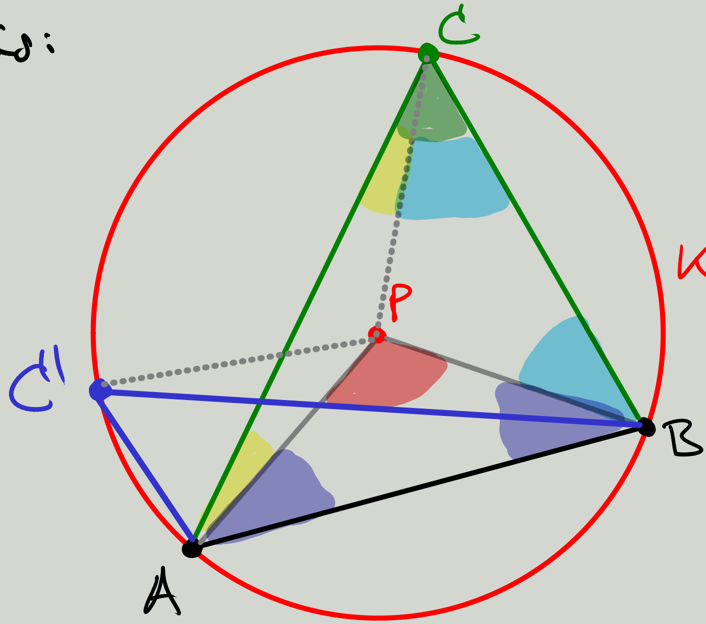
Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt P, sowie $A, B \in K$ zwei verschiedene Punkte.
Dann gilt für jeden Punkt $C \in K$, der auf der gleichen Seite von $g(A,B)$ liegt wie P,

$$\sphericalangle ACB = \quad = \tfrac{1}{2} \cdot \quad = \tfrac{1}{2} \sphericalangle APB.$$

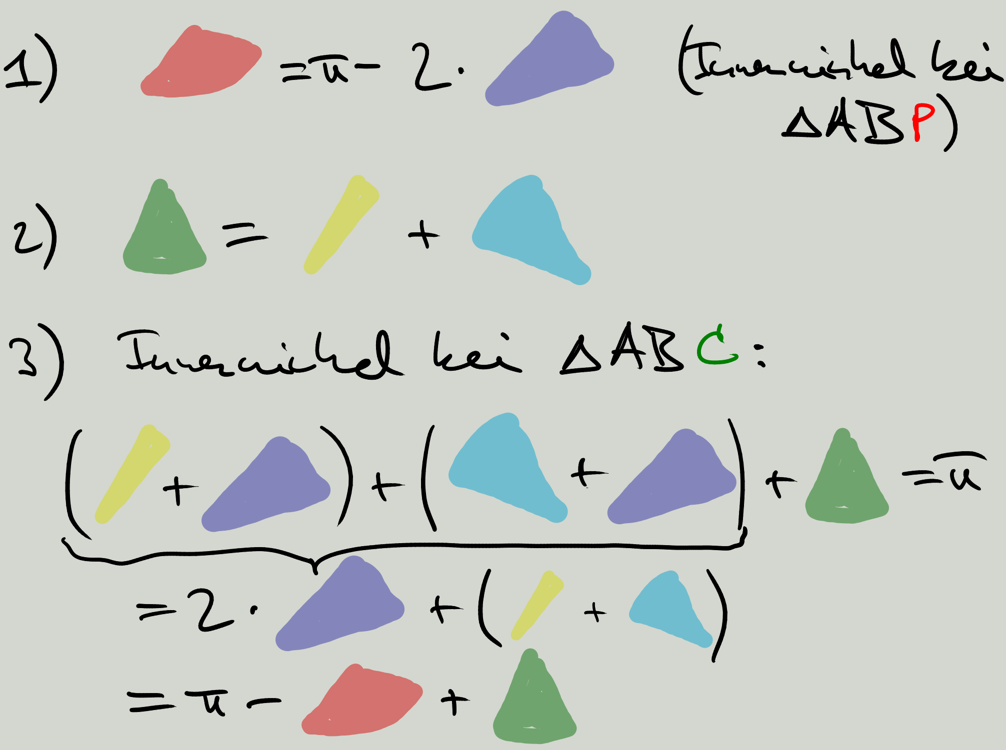
Insbesondere ist der Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$ unabhängig von C.



Beweis:



C
K
P
C'
B
A



1) = π − 2 · (Innenwinkel bei ΔABP)
2) = +
3) Innenwinkel bei ΔABC:
(+) + (+) + = π
= 2 · + (+)
= π − +

Also folgt:

$\pi -$  $+ 2 \cdot$  $= \pi$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot$  $=$ 

()

(+ ÜG A2)