Vorlesung 8:

... letzte Woche...

Konstruktionen mit Zirkel + Lineal

M = Menge an konstruierten bzw. gegebenen Punkten

Erlaubte Operationen:

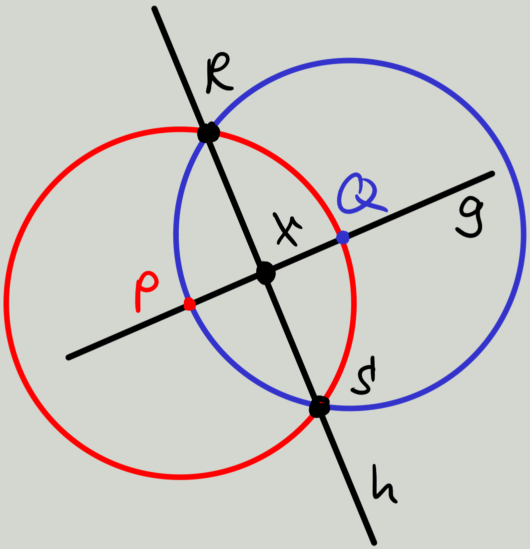
(Z) Zirkel: Sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, zeichne den Kreis

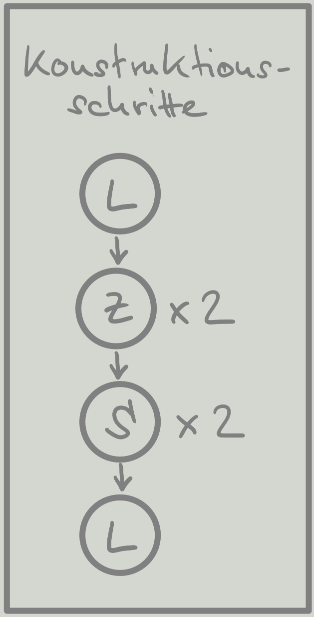
$$K(P, r), \text{ wobei } r = \ell(\overline{PQ}).$$

(L) Lineal: Sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, zeichne die Gerade $g(P, Q)$.

(S) Schnittpunkte: Ist P ein Schnittpunkt von Geraden bzw. Kreisen, die durch (L) bzw. (Z) entstanden sind, füge P zu der Menge M an konstruierten Punkten hinzu.

Beispiel: Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$

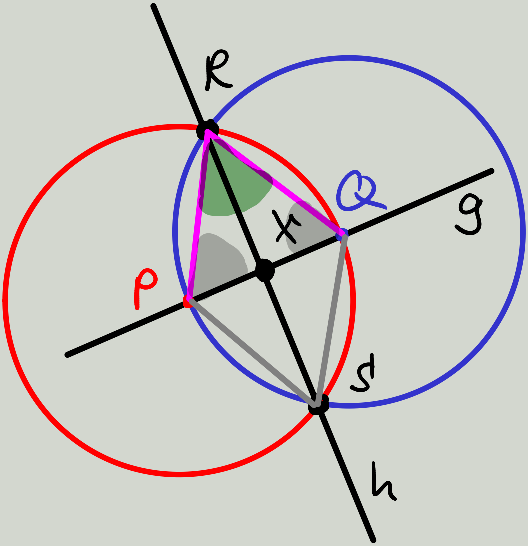




__Behauptung:__ $g(R,S)$ ist die Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$.

__Beweis:__ Seien $g = g(P,Q)$ und $h = g(R,S)$ sowie X der Schnittpunkt von g und h.

__Ziel:__ Zeige $\triangle PXR \sim \triangle QXR$.



Nach Konstruktion gilt

$$\ell(\overline{PR}) = \ell(\overline{QR}) \qquad (1)$$

$\triangle PQR$ ist gleichschenklig, und daher auch gleichwinklig:

$$\sphericalangle RPX = \quad = \sphericalangle RQX. \qquad (2)$$

<u>Behauptung:</u> $\sphericalangle XRP = \quad = \sphericalangle XRQ. \qquad (3)$

◀ $\triangle PSR \sim \triangle QSR$ nach Kongruenzsatz SSS. ▶

Nach Kongruenzsatz WSW folgt

$$\triangle RPX \sim \triangle RQX$$

Also folgt unmittelbar, dass

$$\ell(\overline{PX'}) = \ell(\overline{QX'}),$$

d.h. X' halbiert die Strecke $\overline{PQ}$.

Zudem gilt

$$\measuredangle PX'R = \measuredangle QX'R$$

sowie

$$\measuredangle PX'R + \measuredangle QX'R = \pi.$$

Somit folgt

$$\measuredangle PX'R = \measuredangle QX'R = \frac{\pi}{2},$$

d.h. g und h sind senkrecht zueinander. $\blacksquare$

Lemma:

Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$

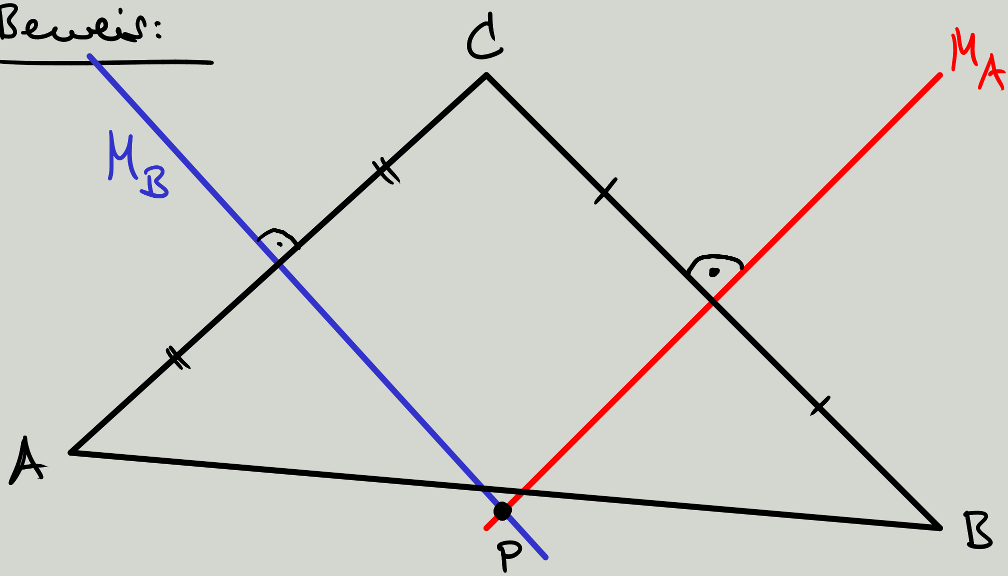
$$= \{ A \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ}) \}$$

<u>Beweis</u>: ÜBA 1 $\blacksquare$

Satz:

Die drei Mittelsenkrechten eines beliebigen Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis:



Sei ΔABC ein beliebiges Dreieck.
Seien M_A die Mittelsenkrechte auf $\overline{BC}$ und M_B die Mittelsenkrechte auf $\overline{AC}$.
Sei P der Schnittpunkt von M_A und M_B. (P existiert, weil da $\overline{AC}$ nicht parallel zu $\overline{BC}$ ist, also M_A und M_B auch nicht parallel sein können.)

Nach dem Lemma gilt

$$P \in M_A \Rightarrow \ell(\overline{PC}) = \ell(\overline{PB})$$

sowie

$$P \in M_B \Rightarrow \ell(\overline{PC}) = \ell(\overline{PA}).$$

Also gilt insbesondere $\ell(\overline{PB}) = \ell(\overline{PA})$. Nach dem Lemma (angewendet in umgekehrter Richtung zu oben) folgt, dass P auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ liegt. $\blacksquare$

Satz:

Zu je drei nicht-kollinearen Punkten $A, B, C \in \mathbb{E}$ gibt es <u>genau einen Kreis K</u>, der A, B, C enthält.

<u>Beweis:</u>

Wir haben im obigen Beweis gesehen, dass der Schnittpunkt P der Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$ die gleiche

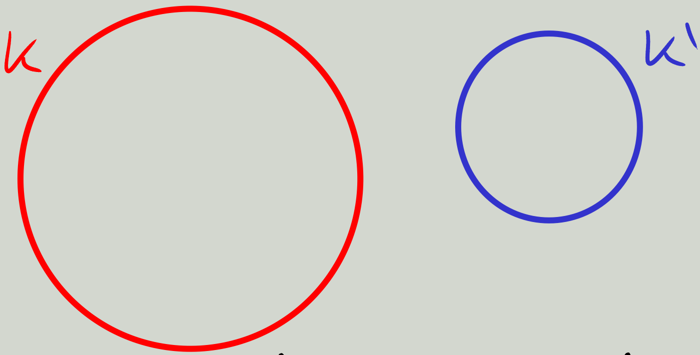
Entfernung zu den Eckpunkten A, B, C hat. Daher liegen A, B, C auf dem Kreis

$$K = K(P, \ell(\overline{PA})).$$

Es bleibt zu zeigen, dass dies der einzige Kreis mit der gewünschten Eigenschaft ist.

Angenommen, K' ist ein Kreis mit $A, B, C \in K'$. Dann gilt:

$$K \cap K' \supseteq \{A, B, C\}.$$



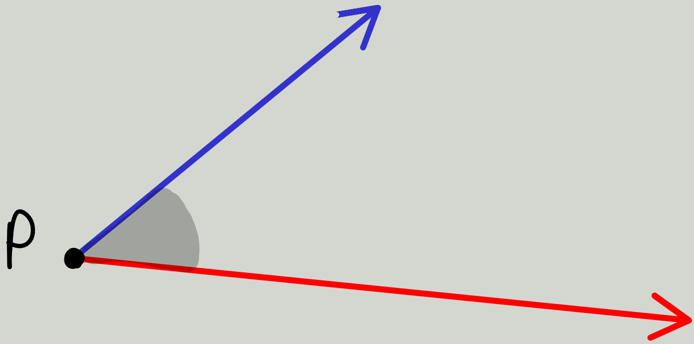
Aber verschiedene Kreise schneiden sich in maximal 2 verschiedenen Punkten. Also gilt $K = K'$. ∎

Definition:

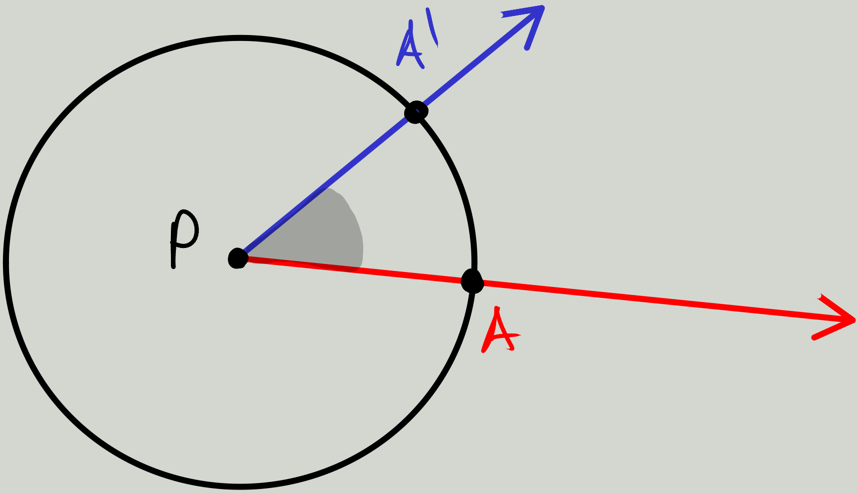
Man nennt den Kreis K aus dem Satz den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$.

Beispiel: Winkelhalbierende

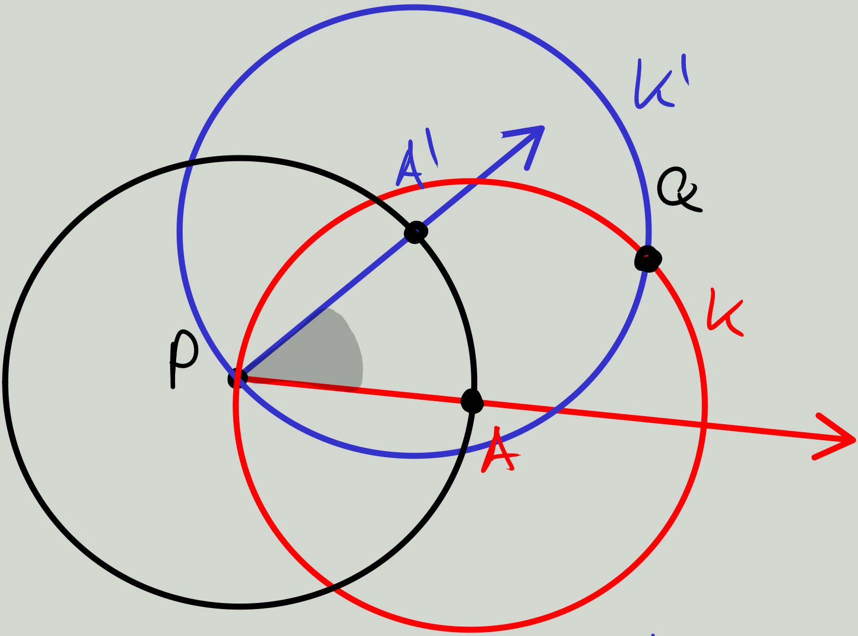
Gegeben: Punkt P, sowie zwei Strahlen mit Anfangspunkt P.



(2) Schlage Kreis um P mit beliebigem Radius



⑥ Markiere Schnittpunkte A und A'.

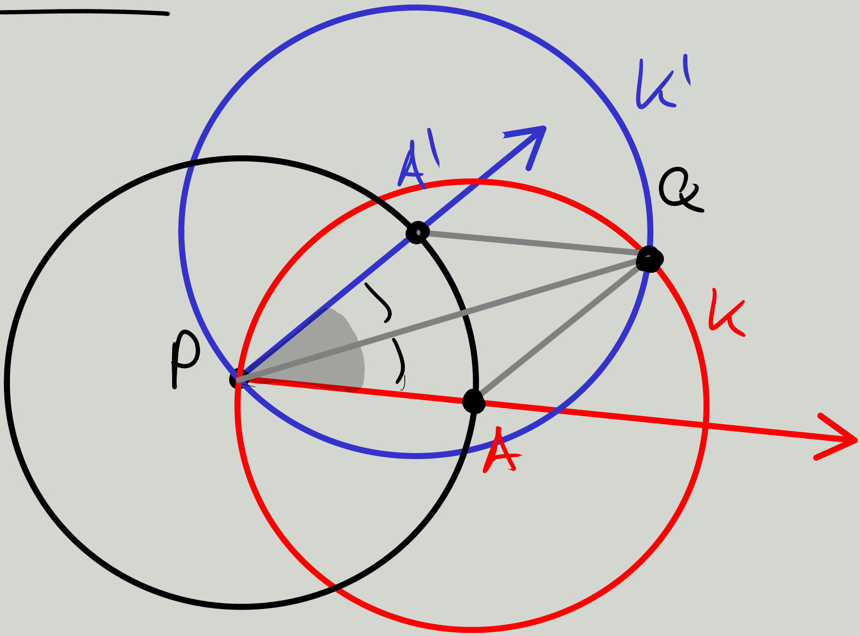


⑦ Schlage Kreise K und K' um A bzw A' mit Radien $l(\overline{AP})$.

(5) Markiere Schnittpunkt Q von Kreisen K und K'.

<u>Behauptung:</u> Die Gerade $g = g(P, Q)$ ist die Winkelhalbierende des Winkels $= \measuredangle APA'$.

<u>Beweis:</u>



$\triangle PQA \sim \triangle PQA'$ nach Kongruenzsatz SSS. Daher folgt

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle A'PQ$$

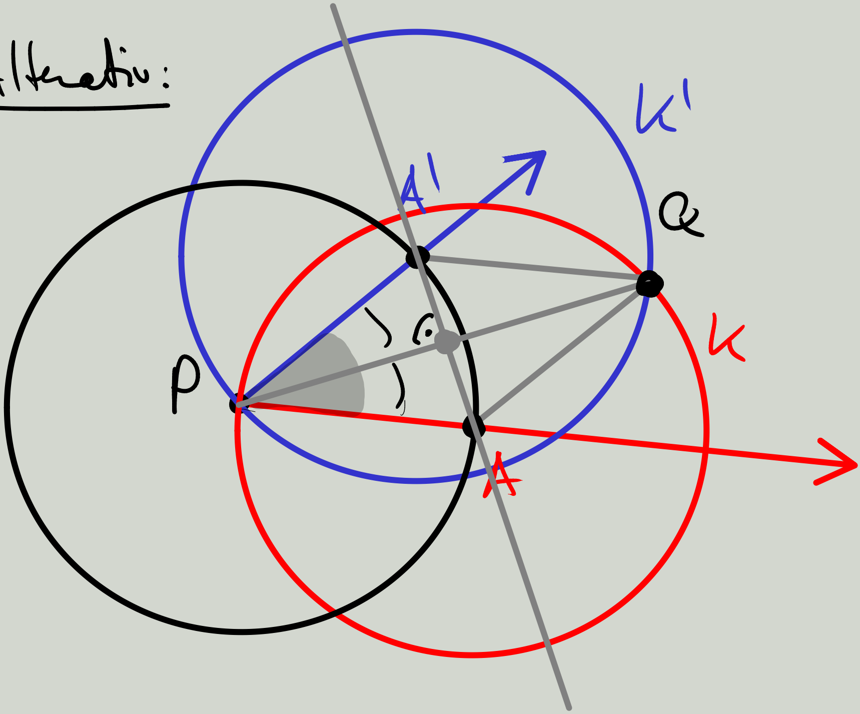
Außerdem

$$\sphericalangle APQ + \sphericalangle A'PQ = \quad = \sphericalangle APA'$$

Also folgt

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle A'PQ = \frac{1}{2} \quad . \qquad \blacksquare$$

Alternativ:



Das Viereck $PAQA'$ ist eine Raute.

Daher kann man alternativ auch einfach die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AA'}$ konstruieren.

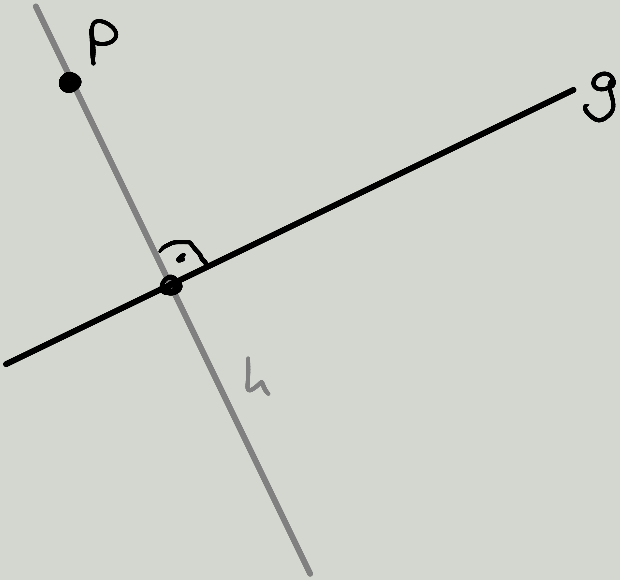
Beispiel: Das Lot fällen bzw. errichten

Satz/Definition: Sei g eine Gerade und P ein beliebiger Punkt der Ebene. Dann gibt es genau eine Gerade h, die senkrecht zu g ist und gleichzeitig durch P verläuft.

Wir nennen h das <u>Lot bzgl. P auf g</u>.

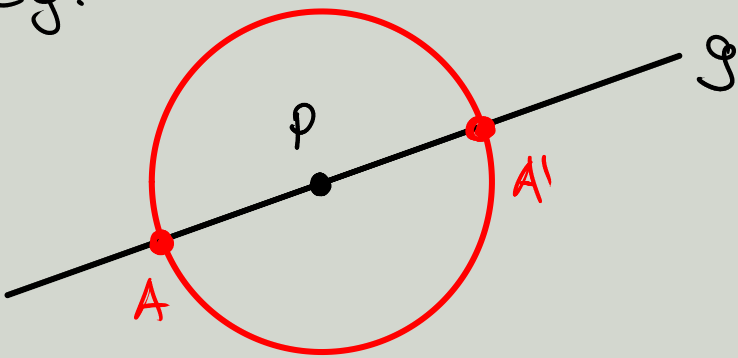
Der Schnittpunkt von h und g heißt Lotfußpunkt. Wir unterscheiden zwei leicht verschiedene Fälle:

1) $P \in g$: "Lot errichten"
2) $P \notin g$: "Lot fällen".



Konstruktion:

1) $P \in g$:



(2) Schlage Kreis K um P mit beliebigem Radius.

(3) Markiere Schnittpunkte A und A' zwischen K und g.

(M) Mittelsenkrechte: Konstruiere die Mittelsenkrechte h zu $\overline{AA'}$.

<u>Behauptung:</u> $P \in h$.

◄ Nach Lemma gilt

h = Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$

$= \{ Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{A'Q}) \}$.

Nach Konstruktion gilt

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{A'P}).$$

Also folgt $P \in h$. ■

2) $P \notin g$: nächste Woche