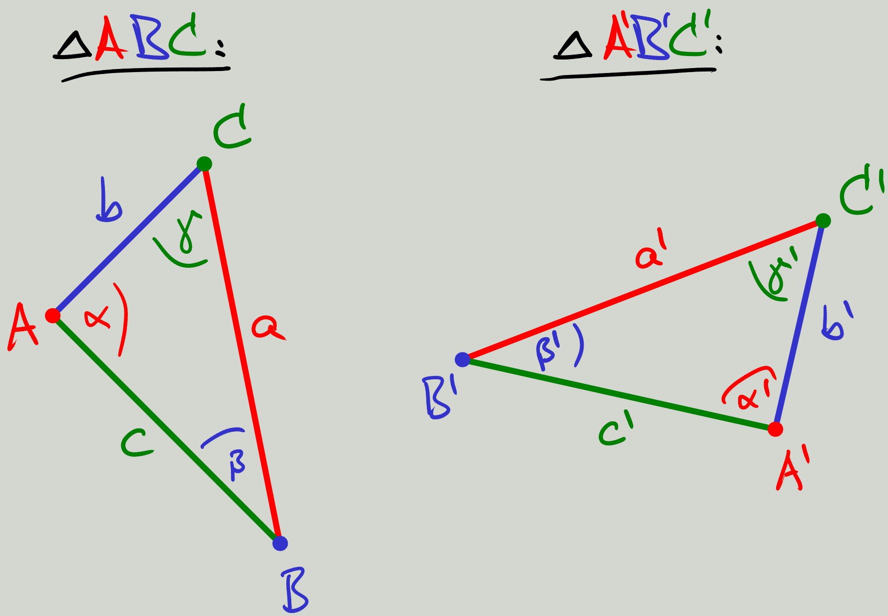
Vorlesung 7:

... letzte Woche ...

Gegeben: zwei Dreiecke



Gilt $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, so folgt

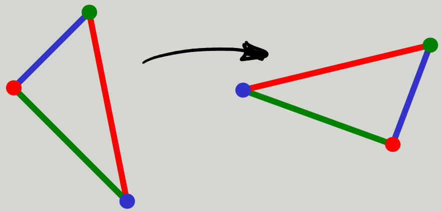
$a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$, sowie

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

Gilt auch die Umkehrung?

Kongruenzsatz SSS — Seite-Seite-Seite

Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke derart, dass



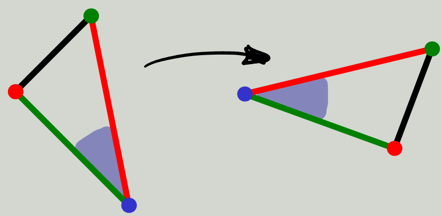
$a = a'$, $b = b'$

und $c = c'$.

Dann folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Kongruenzsatz SWS — Seite-Winkel-Seite

Gilt



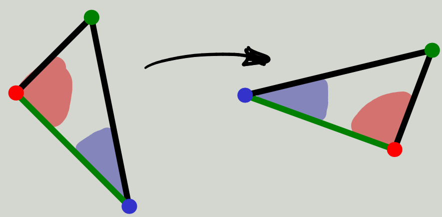
$a = a'$, $\beta = \beta'$

und $c = c'$,

so folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Kongruenzsatz WSW — Winkel-Seite-Winkel

Gilt



$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$,

und $c = c'$,

so folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

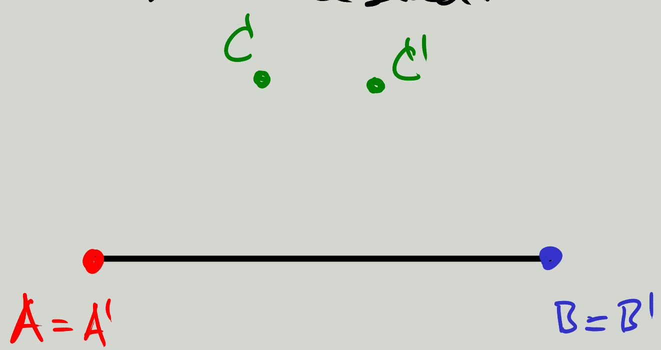
→ item pool: (1)–(3)

Beweis von SWS und WSW:

Zwei Strecken sind kongruent, sobald ihre Längen übereinstimmen. Daher folgt aus $c = c'$, dass nach Anwendung einer (geeigneten) Bewegung wir annehmen können, dass

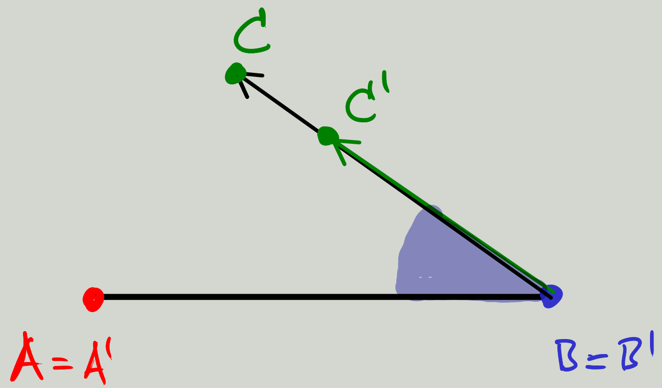
$$A = A' \quad \text{und} \quad B = B'$$

gilt. Nun liegen C und C' entweder auf der gleichen Seite von $g(A, B)$ oder auf unterschiedlichen Seiten. Im zweiten Fall können wir durch Anwendung einer Spiegelung entlang $g(A, B)$ annehmen, dass wir im ersten Fall sind:



Nun wissen wir, dass

$$\sphericalangle ABC = \beta = \quad = \beta' = \sphericalangle A'B'C'$$



Nach einem Lemma aus der 2. Vorlesung folgt daraus, dass $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

<u>Fall SWS:</u>

Wir wissen, dass

$$\overline{BC} = a = a' = \overline{B'C'} = \overline{BC'}$$

Daraus folgt, dass $C = C'$.

Fall WSW:

Analog zu der Folgerung

$$\beta = \beta' \implies \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$$

kann man

$$\alpha = \alpha' \implies \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

zeigen.

Zwei Strahlen schneiden sich in maximal einem Punkt (sofern sie nicht identisch sind). Daher gilt

$$\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AC} = \{C\}$$

und analog gilt

$$\overrightarrow{B'C'} \cap \overrightarrow{A'C'} = \{C'\}$$

Aus $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$

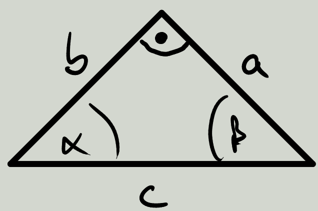
folgt $C = C'$. $\blacksquare$

Definition:

Ein Dreieck heißt...

- <u>gleichschenklig</u>, wenn zwei Seiten gleich lang sind.
- <u>gleichwinklig</u>, wenn es zwei Winkel derselben Größe gibt.
- <u>gleichseitig</u>, wenn <u>alle</u> Seiten gleich lang sind.

Beispiel: Geodreieck



Es gilt

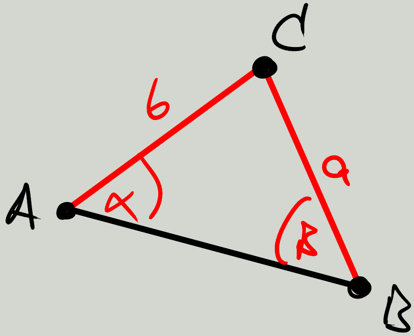
$\alpha = \beta = 45^\circ \Rightarrow$ gleichwinklig

und

$a = b \Rightarrow$ gleichschenklig.

Satz:

Ein Dreieck ist genau dann gleichwinklig, wenn es gleichschenklig ist. Genauer gesagt, ist ΔABC das Dreieck



so gilt:

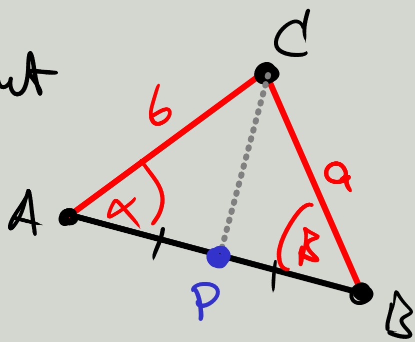
$$\alpha = \beta \iff a = b.$$

Beweis:

Die Richtung "$\Rightarrow$" ist Ü7A3.

Wir zeigen "$\Leftarrow$".

Sei P der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.



Betrachte die Dreiecke

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\triangle APC} & & \underline{\triangle BPC} \\
b & = & a \\
\overline{PC} & = & \overline{PC} \\
\overline{AP} & = & \overline{BP}
\end{array}$$

Also folgt nach Kongruenzsatz SSS,

$$\triangle APC \sim \triangle BPC$$

Insbesondere gilt $\alpha = \beta$. ∎

Bemerkung:

Man kann „$\Leftarrow$" auch ohne Hilfspunkte beweisen. Betrachte die Dreiecke

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\triangle ABC} & \text{und} & \underline{\triangle BAC} \\
\overline{AB} & = & \overline{BA} \\
\overline{BC} = a & = & b = \overline{AC} \\
\overline{CA} = b & = & a = \overline{CB}
\end{array}$$

Also folgt aus SSS

$$\triangle ABC \sim \triangle BAC$$

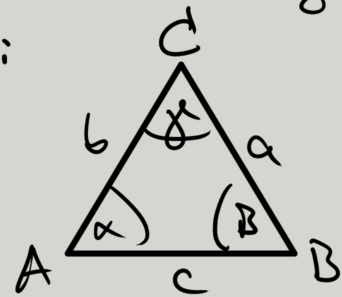
Also gilt

$$\alpha = \text{Winkel bei } A$$
$$= \text{Winkel bei } B = \beta. \qquad \blacksquare$$

Korollar:

Die Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks sind gleich groß.

◀ Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck:



Dann gilt nach dem Satz

$$a = b \implies \alpha = \beta.$$

Ebenso gilt:

$$b = c \implies \beta = \gamma$$

Also gilt $\alpha = \beta = \gamma$. ▶

Konstruktionen mit Zirkel + Lineal

→ Euclidea α1 + α2 + α3

Sei M = Menge an gegebenen bzw. konstruierten Punkten.

Folgende Operationen sind erlaubt:

(Z) <u>Zirkel:</u> Sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, so können wir einen Kreis $K(P, r)$ zeichnen mit Zentrum P und Radius $r = \ell(\overline{PQ})$.

(L) <u>Lineal:</u> Sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, so können wir die Gerade $g(P, Q)$ zeichnen.

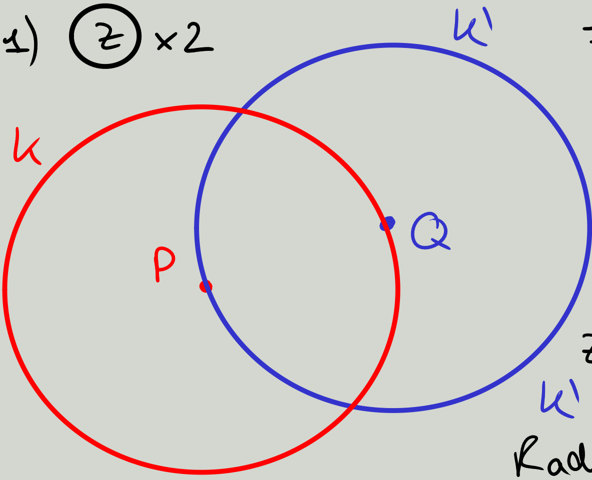
(S) <u>Schnittpunkte:</u> Füge Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, die durch (Z) und (L) entstanden sind, zu der Menge M an konstruierten Punkte hinzu.

Beispiel Mittelsenkrechte

Gegeben: zwei Punkte $P \neq Q$

$M = \{P, Q\}$

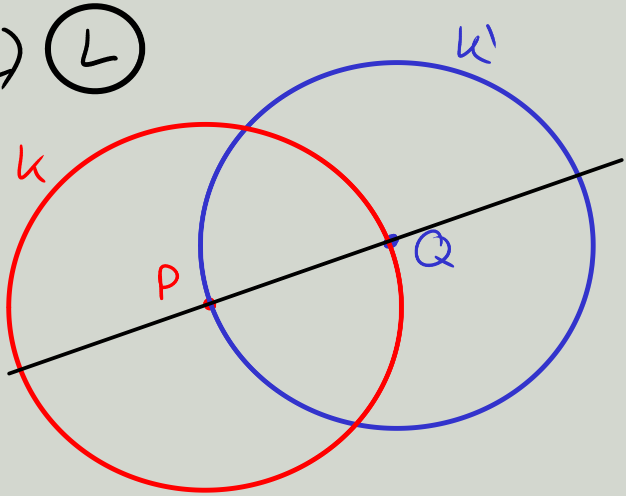
1) Z ×2



Zeichne Kreis k um P mit Radius $r = \ell(\overline{PQ})$

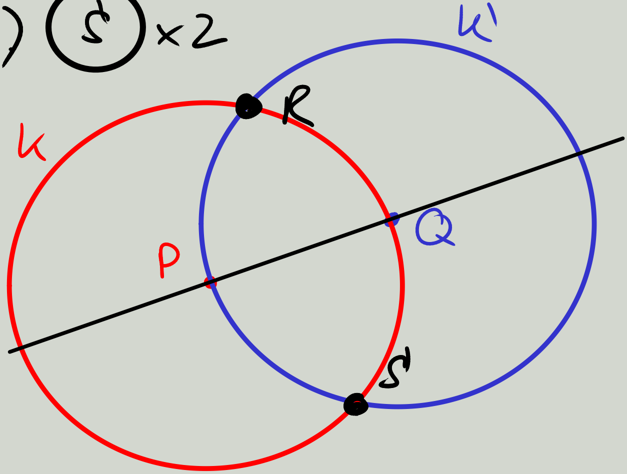
Zeichne Kreis k' um Q mit Radius r.

2) L



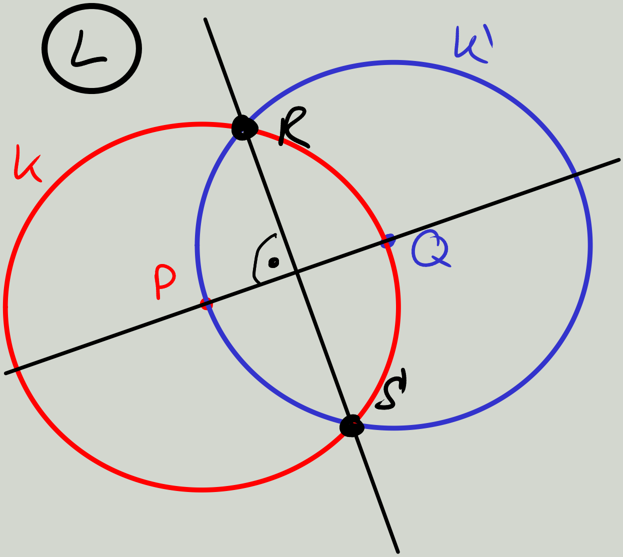
Zeichne Gerade $g(P, Q)$.

3) S $\times 2$



$M = \{P, Q, R, S\}$

4) L



zeichne Gerade $g(R, S)$

<u>Behauptung:</u> $g(R,S)$ ist die gesuchte Mittelsenkrechte zu der Strecke $\overline{PQ}$.

(Beweis nächste Woche)

→ offizielle Evaluierung

https://evasys.uni-regensburg.de/evasys/online.php?p=Elementargeom.

(siehe auch Link auf GRIPS)