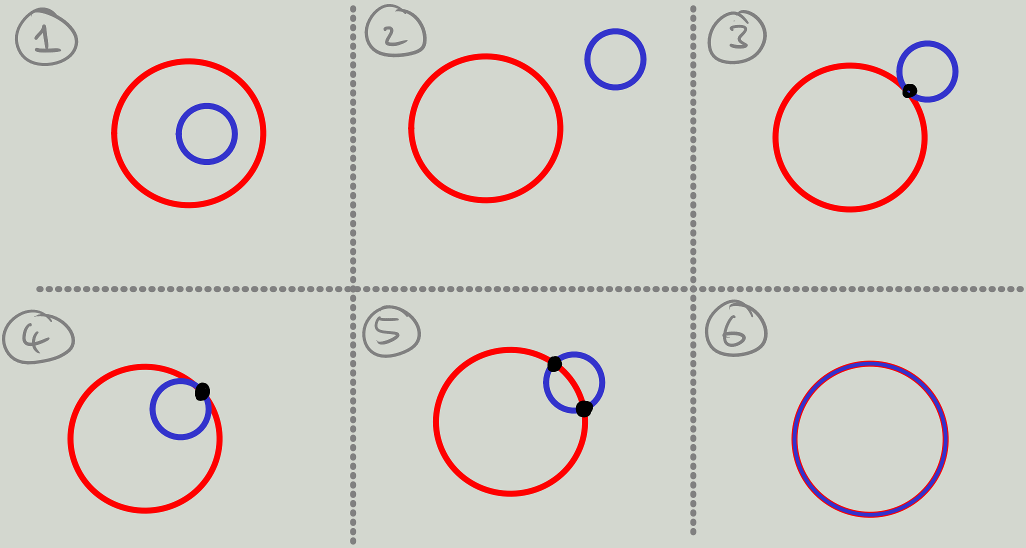
Vorlesung 6:

$$\boxed{K(P,r)=\{Q\in\mathbb{E} \mid \ell(\overline{PQ})=r\}}$$

III Kreise

Seien $K=K(P,r)$, $P\in\mathbb{E}$, $r>0$, und
$K'=K(P',r')$, $P'\in\mathbb{E}$, $r'>0$.

Beispiele:



Satz:

Es gilt genau eine der folgenden Aussagen

- $K \cap K' = \emptyset$
- $K \cap K' = \{1 \text{ Punkt}\}$
- $K \cap K' = \{2 \text{ Punkte}\}$
- $K = K'$

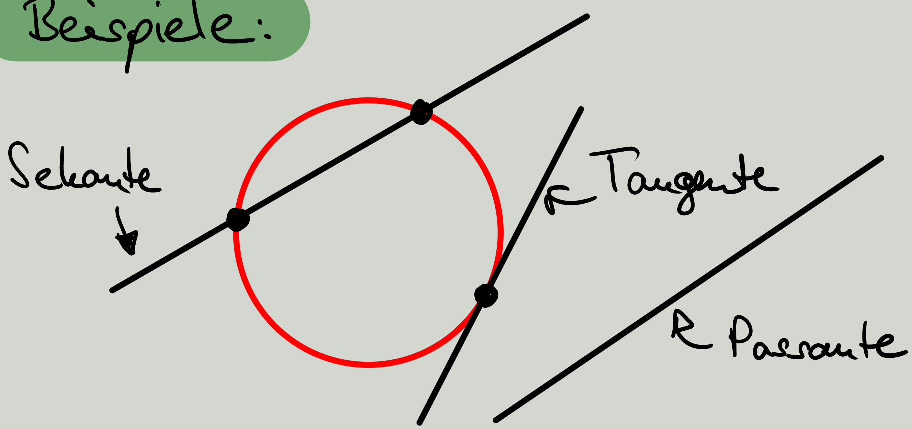
Beweis: Explizite Berechnung
(siehe Vorlesungsskript)
Hauptidee: Quadratische Gleichungen
haben 0, 1 oder 2 Lösungen.
($K = K'$ ist ein Sonderfall.) $\blacksquare$

Satz/Definition (Ü6 A3)

Seien K ein Kreis und g eine Gerade.
Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- $K \cap g = \emptyset$ (g heißt <u>Passante zu K</u>)
- $K \cap g = \{1 \text{ Punkt}\}$ (g heißt <u>Tangente zu K</u>)
- $K \cap g = \{2 \text{ Punkte}\}$ (g heißt <u>Sekante zu K</u>)

Beispiele:



→ item pool: 1| #Tangenten

→ geogebra

Satz:

Sei $K = K(P,r)$ ein Kreis und $Q \in K$. Dann gibt es genau eine Tangente zu K, die durch Q geht, nämlich die Gerade g' durch Q, die senkrecht auf der Geraden $g(P,Q)$ steht.

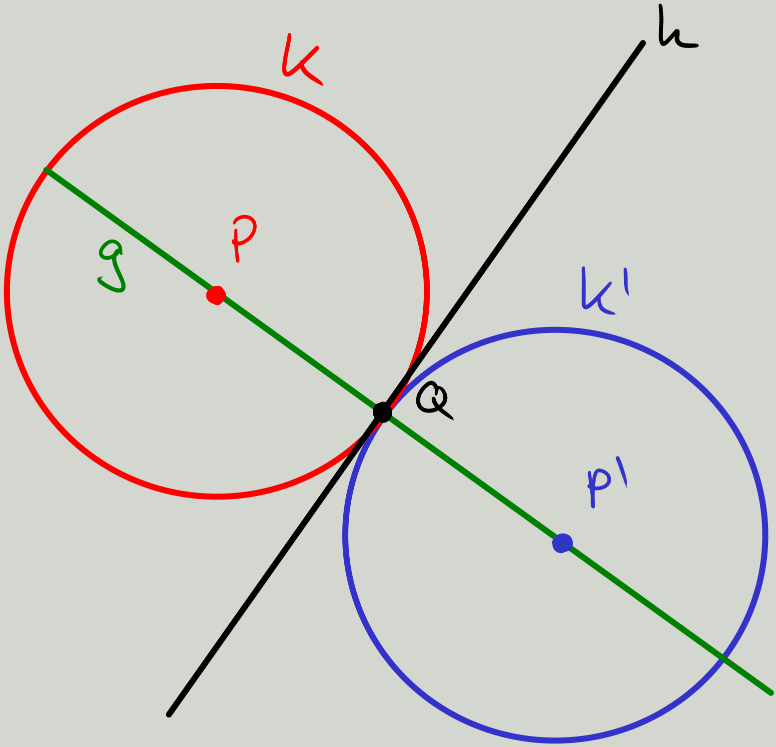
Lemma:

Seien $K = K(P,r)$ und $K' = K(P',r')$ zwei Kreise mit genau einem Schnittpunkt $Q \in K \cap K'$. Dann gilt $Q \in g = g(P,P')$.

Beweis vom Lemma:

Sei σ_g die Spiegelung entlang g.

Dann gilt $\sigma_g(K) = K$, da $P \in g$ (und somit $\sigma_g(P) = P$). Analog folgt aus $P' \in g$ auch $\sigma_g(K') = K'$.



$$\sigma_g(Q) \in \sigma_g(k \cap k') = k \cap k' = \{Q\}$$

Also folgt $\sigma_g(Q) = Q$.

Nach der Charakterisierung von Spiegelungen folgt $Q \in g$.

Beweis von Satz:

Sei h eine Tangente zu K durch Q.
Sei σ_h die Spiegelung entlang h.
Sei $P' = \sigma_h(P)$. Es gilt offensichtlich,
dass $P \notin h$.
$\Rightarrow g(P, P')$ senkrecht zu h.
Korollar der geom. Charakterisierung von Spiegelungen

Zu zeigen: $Q \in g(P, P')$.
Wir wollen das Lemma anwenden
auf K und $K' := \sigma_h(K)$.
Es reicht zu zeigen, dass Q der einzige Schnittpunkt ist von K und K'.

Behauptung: $K \cap K' = \{Q\}$.

◀ Wir wissen $Q \in K \cap K'$, da $Q \in h$.
Außerdem ist $P \neq P'$, weil $P \notin h$.
Somit $K \neq K'$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass es keinen Punkt $Q' \neq Q$ gibt, derart dass

$$K \cap k' = \{Q, Q'\}.$$

Angenommen, das wäre der Fall.

$$\sigma_h(Q) = Q$$

$$\sigma_h(Q') \in \sigma_h(K \cap k') = \underbrace{\sigma_h(K)}_{k'} \cap \underbrace{\sigma_h(k')}_{K}$$

$$= K \cap k' = \{Q, Q'\}.$$

Also ist $\sigma_h(Q') = Q$ oder $\underline{\sigma_h(Q') = Q'}$.

Aber Spiegelungen sind (als Bewegungen) bijektiv, daher ist $\sigma_h(Q') \neq Q = \sigma_h(Q)$.

Also $Q' \in h$.

Insbesondere gilt $Q' \in h \cap K$, aber das steht im Widerspruch zur Annahme, dass h eine Tangente ist. ◀

Wir wissen nun nach dem Lemma, dass $g(P, P') = g(P, Q)$.

Also ist h senkrecht zu $g(P, Q)$.

Es bleibt zu zeigen, dass g' tatsächlich eine Tangente ist. (Ü6A2). $\blacksquare$

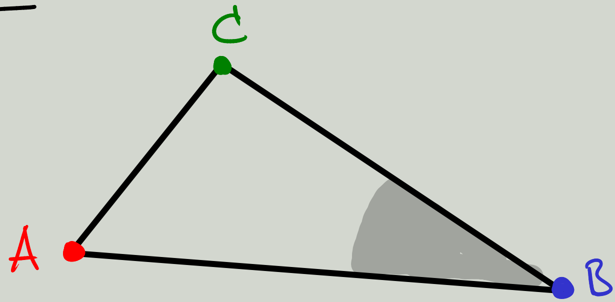
IV Kongruenzsätze für Dreiecke

Erinnerung:

Drei Punkte A, B und C heißen <u>kolinear</u>, wenn sie auf einer Geraden liegen.

Definition:

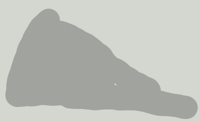
Angenommen, A, B und C sind drei <u>nicht</u> kolineare Punkte:



Dann heißt

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

das von A, B und C aufgespannte Dreieck. Wir schreiben

$\measuredangle ABC =$  $= \measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

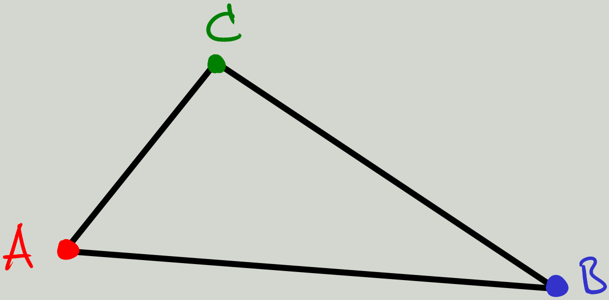
Definition:

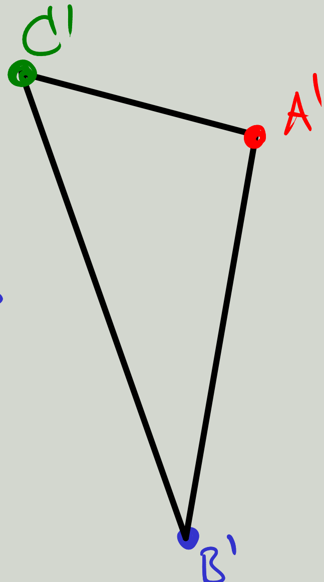
Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ heißen <u>kongruent</u>, falls es eine Bewegung gibt derart, dass

$$A \mapsto A', \quad B \mapsto B' \text{ und } C \mapsto C'$$

abgebildet werden. Und wir schreiben in dem Fall

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$





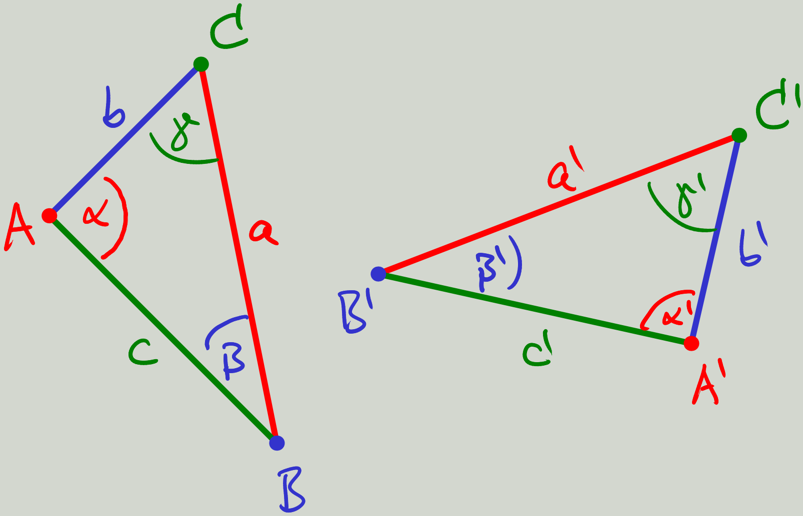
Warnung:

Die Reihenfolge der Punkte ist wichtig!

$\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind in diesem Beispiel <u>nicht</u> kongruent. Aber es gilt

$$\triangle ABC \sim \triangle C'B'A'.$$

Wir führen nun folgende Bezeichnung von Seiten und Winkeln ein:



Beobachtung:

Gilt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, so folgt:

$a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$, sowie

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

Gilt auch die Umkehrung?

Kongruenzsatz SSS: Seite-Seite-Seite

Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke derart, dass

$a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$.

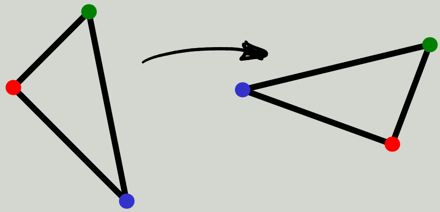
Dann folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Der Kongruenzsatz SSS folgt direkt aus:

Lieblingssatz über Bewegungen

Seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei nicht-kolineare Punkte und $A', B', C' \in \mathbb{E}$ derart, dass

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$$
$$\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$$
$$\ell(\overline{CA}) = \ell(\overline{C'A'})$$



Dann gibt es <u>genau eine</u> Bewegung $\varphi: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ derart, dass

$$\varphi(A) = A', \ \varphi(B) = B' \text{ und } \varphi(C) = C'.$$

Was, wenn wir nicht alle Seiten kennen?

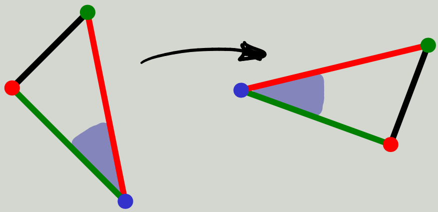
→ itempool: 2) WWW
3) SWS
4) WSW

Kongruenzsatz SWS — Seite-Winkel-Seite

Gilt

$a = a'$, $\beta = \beta'$

und $c = c'$,



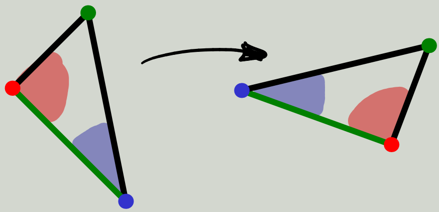
so folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Kongruenzsatz WSW — Winkel-Seite-Winkel

Gilt

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$,

und $c = c'$,



so folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Bemerkung:

Gilt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, so folgt bereits, dass $\gamma = \gamma'$. Daher bleibt der Kongruenzsatz WSW richtig, wenn wir die Bedingung $c = c'$ durch $a = a'$ oder $b = b'$ ersetzen.