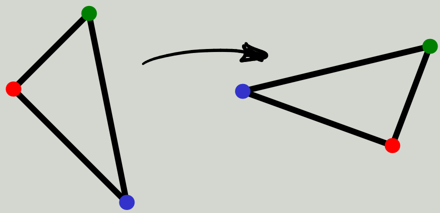
# Vorlesung 5

Erinnerung (Letzte Vorlesung):

**Korollar 4:**

Seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei nicht-kolineare Punkte und $A', B', C' \in \mathbb{E}$ derart, dass

$$\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$$
$$\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$$
$$\ell(\overline{CA}) = \ell(\overline{C'A'})$$



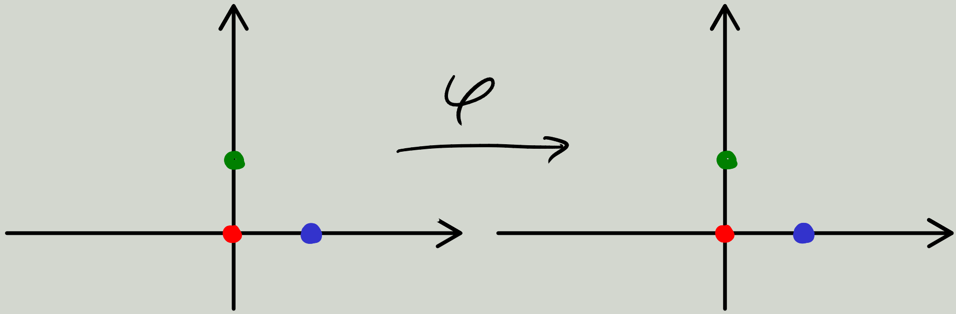
Dann gibt es <u>genau eine</u> Bewegung $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ derart, dass

$$\varphi(A) = A', \ \varphi(B) = B' \text{ und } \varphi(C) = C'.$$

**Beispiele:** Bestimme die Bewegung $\varphi$ für die folgenden Wahlen von $A, B, C, A', B', C'$:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

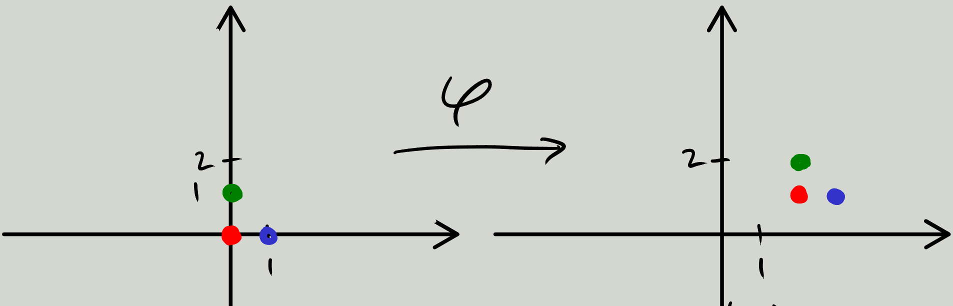
$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$




$\varphi$ ist die identische Abbildung.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

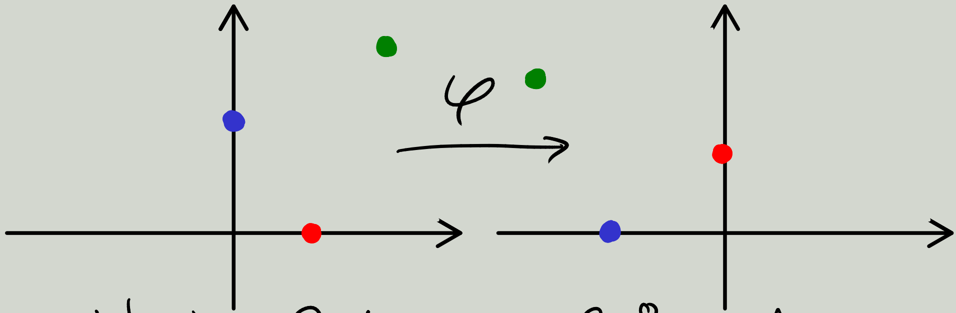
$A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$




$\varphi$ ist eine Verschiebung um $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

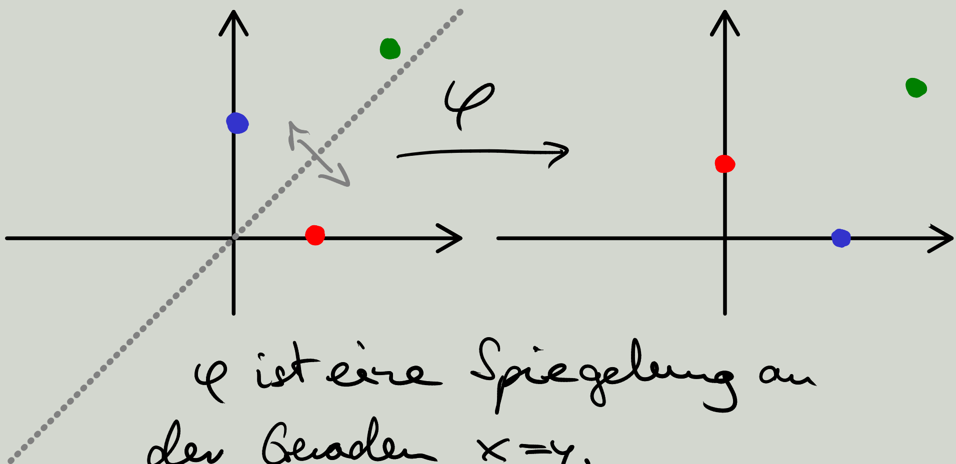
$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$



$\varphi$ ist eine Drehung um $90°$ um den Ursprung.

4) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

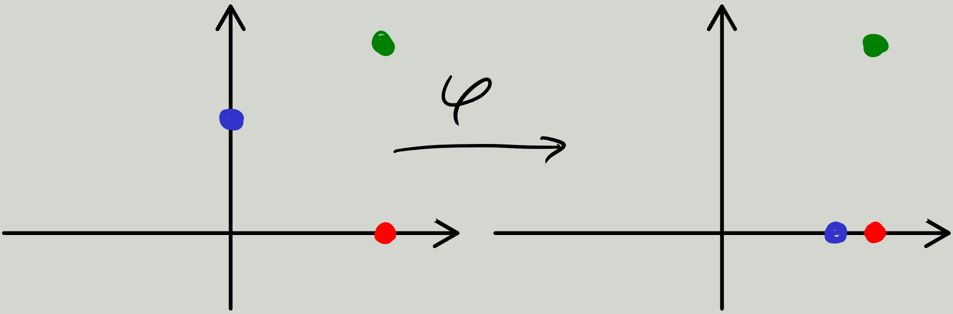
$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$



$\varphi$ ist eine Spiegelung an der Geraden $x=y$.

5) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$




Es gibt gar keine Bewegung mit den gesuchten Eigenschaften, da

$$5 = \ell(\overline{AB}) \neq \ell(\overline{A'B'}) = 1 .$$

## Erinnerung (Letzte Vorlesung):

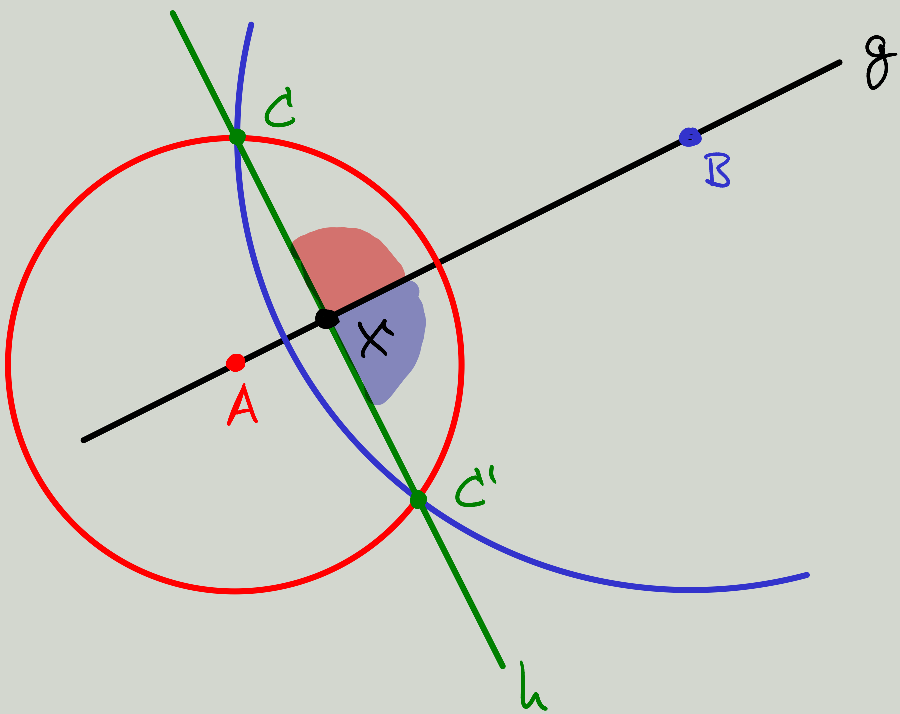
**Satz:** (Geometrische Charakterisierung von Spiegelungen)

Sei $g$ eine Gerade in $\mathbb{E}$. Dann gibt es genau eine Bewegung $\varphi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Punkte $v \in \mathbb{E}$ gilt:

$$\varphi(v) = v \iff v \in g.$$

Wir nennen diese Bewegung $\sigma_g := \varphi$ die Spiegelung entlang von $g$.
Zudem gilt $\sigma_g^2 = id$.

**Korollar:**
Sei $g$ eine Gerade und $C \in \mathbb{E} \setminus g$.
Dann ist $h := g(C, \sigma_g(C))$ eine Gerade, die senkrecht auf $g$ steht.




◀ Es gilt $\sigma_g(C) =: C' \neq C$, da $C \notin g$.

Also ist $h := g(C, C')$ eine wohldefinierte Gerade. Zudem gilt

$$\sigma_g(h) = g(\underbrace{\sigma_g(C)}_{C'}, \underbrace{\sigma_g(C')}_{\sigma_g^2(C) = C})$$

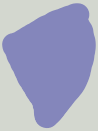
$$= g(C', C) = h$$

Sei $X$ der Schnittpunkt von $g$ und $h$.

Dann gilt:

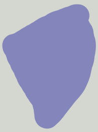
$T_g($  $)$ $=$ 

Da Spiegelungen (allgemeiner: Bewegungen) Winkel erhalten, folgt

 $=$ 

Außerdem gilt nach dem Nebenwinkelsatz

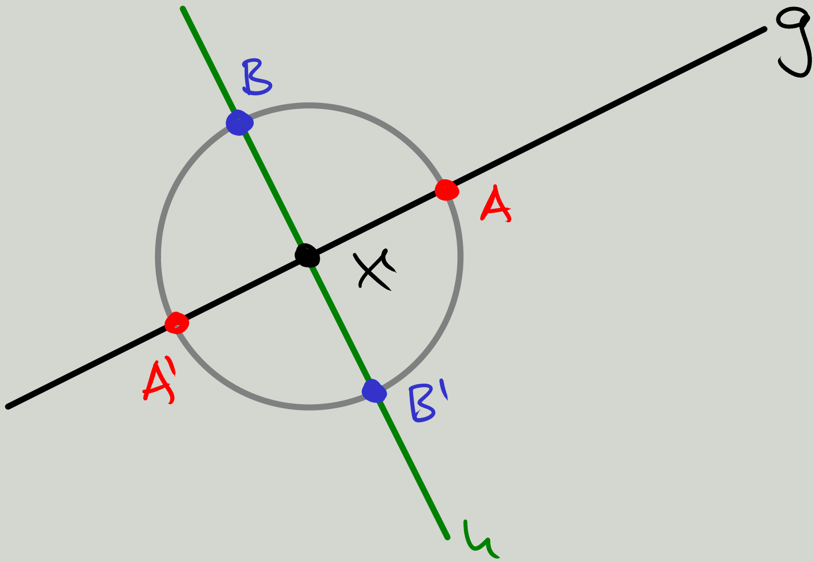
 $+$  $= \pi$

$\Rightarrow$ $2 \cdot$  $= \pi$

$\Leftrightarrow$  $= \dfrac{\pi}{2}$ $\blacktriangleright$

**Satz:** (Ü4 A4)

Sei $X \in \mathbb{E}$ und $g$ und $h$ zwei Geraden durch $X$, die senkrecht aufeinander stehen. Dann ist $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine Drehung um $X$ um den Winkel $\pi$.




◀ $$\sigma_g \circ \sigma_h(X) \underset{X \in h}{=} \sigma_g(X) \underset{X \in g}{=} X.$$

$$\sigma_g \circ \sigma_h(A) = \sigma_g(A') \underset{4}{=} A'$$

$A' \in g$

$$\sigma_g \circ \sigma_h(B) \underset{B \in h}{=} \sigma_g(B) = B'$$

Zusammenfassung: $\sigma_g \circ \sigma_h$:

$$X' \mapsto X', \quad A \mapsto A', \quad B \mapsto B'$$

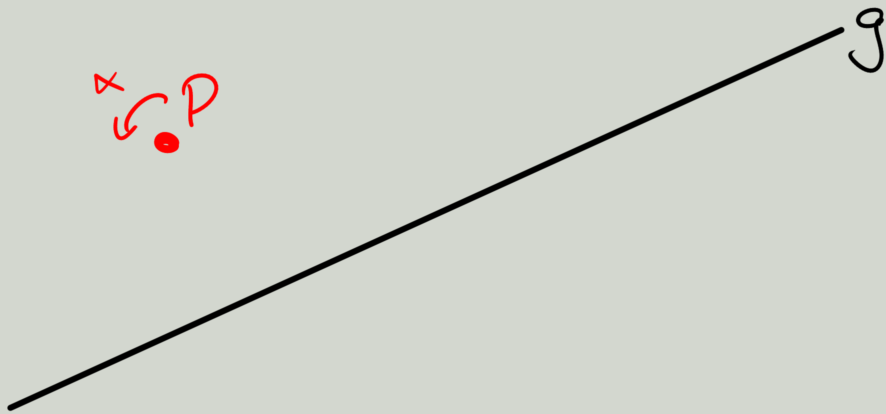
Die Bewegung $\sigma_g \circ \sigma_h$ bildet die Punkte $X'$, $A$ und $B$ also genauso ab wie eine Drehung um $\pi$ um das Zentrum $X'$.

Nach Korollar 4 stimmt $\sigma_g \circ \sigma_h$ mit dieser Drehung überein, da die $X'$, $A$ und $B$ nicht auf einer Geraden liegen. ▶

**Satz:** (Ü4 A6)

Sei $\tau$ eine Spiegelung entlang einer Geraden $g$ und sei $\rho$ eine Drehung um einen Punkt $P$ und einen Winkel $\alpha$. Dann ist $\tau \circ \rho$ genau dann eine Spiegelung, wenn

$$\alpha = 0 \text{ oder } P \in g.$$




◀ $\tau \circ \rho(P) = \tau(P) =: P'$. Ist $\tau \circ \rho$ eine Spiegelung, dann gilt

$$\mathrm{id} = (\tau \circ \rho)^2$$

Also gilt insbesondere auch

$$P = \mathrm{id}(P) = (\sigma \circ \rho)^2 (P)$$
$$= (\sigma \circ \rho)\,(P') = \sigma(\rho(P'))$$

Wenden wir $\sigma$ auf beide Seiten an, erhalten wir

$$P' = \sigma(P) = \underbrace{\sigma^2}_{\mathrm{id}}(\rho(P')) = \rho(P').$$

Also folgt, dass entweder $\alpha = 0$ oder

$$\underset{\sigma(P)}{\overset{\shortparallel}{P'}} = (\text{Zentrum der Drehung } \rho) = P.$$

Also liegt $P$ auf der Geraden $g$. Umgekehrt folgt aus

$$(\alpha = 0 \text{ oder } P \in g),$$

dass $\sigma \circ \rho$ eine Spiegelung ist (siehe Ü5A4).

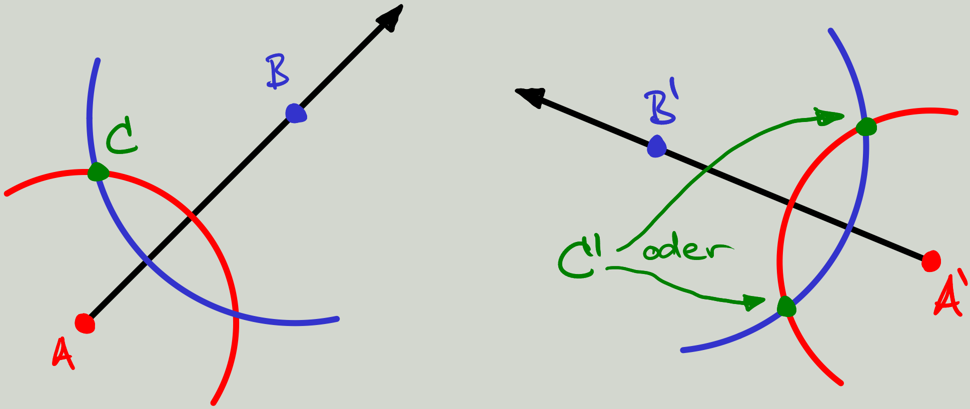
**Definition:**

Wir sagen zwei Teilmengen $A, B \subseteq E$ sind <u>kongruent</u>, falls es eine Bewegung $\varphi: E \longrightarrow E$ gibt derart, dass $\varphi(A) = B$.

**Lemma:**

1) Alle Strahlen sind zueinander kongruent.
2) Alle Geraden sind zueinander kongruent.
3) Seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken. Dann sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:
   a) $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind kongruent.
   b) $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD})$
   c) Es gibt eine Bewegung $\varphi$ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

◀ 1) Seien $A$ und $A'$ die Anfangspunkte der beiden Strahlen und $B \neq A$ und $B' \neq A'$ Punkte auf den jeweiligen Strahlen.




Ohne Einschränkung wähle $B$ und $B'$ derart, dass $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$.

Wähle nun $C \in \mathbb{E} \setminus g(A,B)$.

Wähle ein $C' \in \mathbb{E}$ derart, dass

$$\ell(\overline{CA}) = \ell(\overline{C'A'})$$

$$\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'}).$$

Nach Korollar 4 gibt es genau eine Bewegung $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit

$$\varphi(A) = A', \; \varphi(B) = B' \text{ und}$$

$$\varphi(C) = C'$$

Insbesondere gilt nach Korollar 3, dass $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

2) analog zu (1).

3) (c) $\Rightarrow$ (a) Nach Korollar 3.

(a) $\Rightarrow$ (b) per Definition von Bewegungen.

(b) $\Rightarrow$ (c) analog zu (1). ◼