Vorlesung 13:

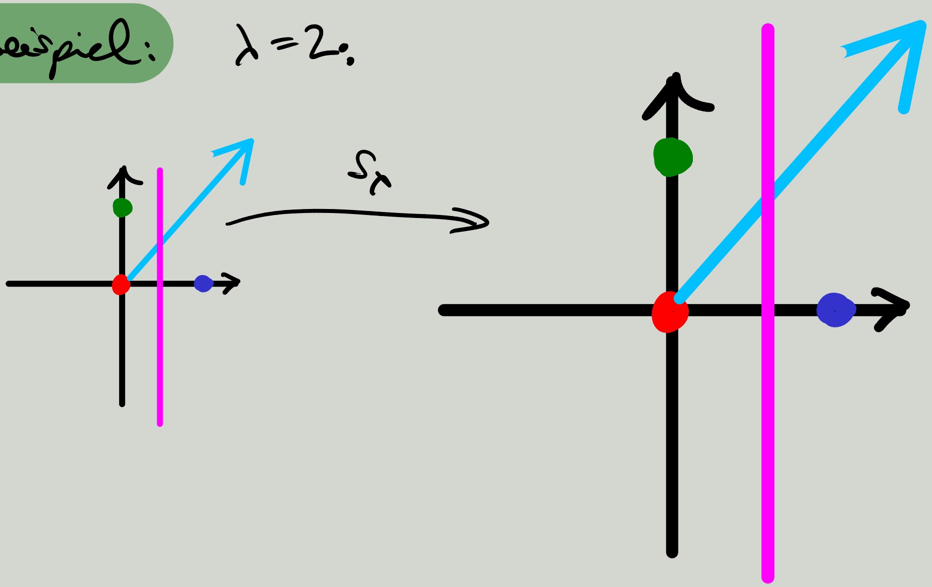
§ Streckungen

Definition:
Sei $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl.
Wir bezeichnen

$$s_\lambda : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$
$$v \longmapsto \lambda \cdot v$$

als Streckung mit Streckfaktor λ.

Beispiel: $\lambda = 2$.



Grundlegende Eigenschaften von s_λ: (7.1)

1) s_λ erhält den Ursprung $(0,0)$

2) s_λ bildet Strahlen, die im Ursprung beginnen, auf sich selbst ab.

3) s_λ erhält Winkel.

4) s_λ bildet jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade ab.

5) Für alle $A, B \in \mathbb{E}$ gilt

$$\ell(\overline{s_\lambda(A)\ s_\lambda(B)}) = \lambda \cdot \ell(\overline{AB}).$$

<u>Beweis:</u> Einfache Rechnung. ☒

Definition:

Eine <u>Ähnlichkeitsabbildung</u> ist eine Verknüpfung einer Bewegung mit einer Streckung. Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ heißen <u>ähnlich</u>, falls es eine Ähnlichkeitsabbildung φ gibt derart, dass

$$\varphi(A) = A', \ \varphi(B) = B' \text{ und } \varphi(C) = C'$$

Beobachtung: Jede Bewegung ist auch eine Ähnlichkeitsabbildung (wähle $\lambda = 1$).

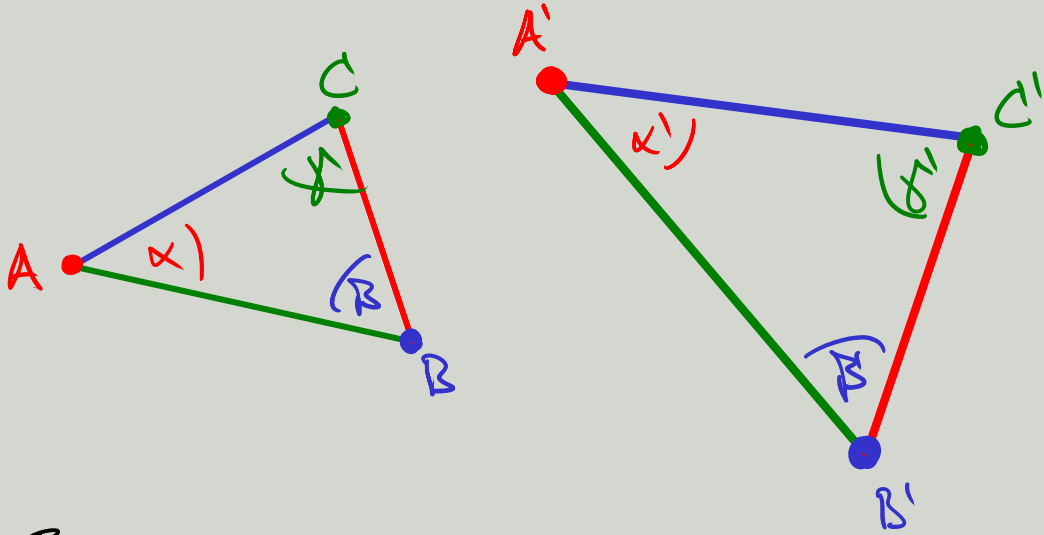
Lemma:
Kompositionen von Ähnlichkeitsabbildungen sind wieder Ähnlichkeitsabbildungen.

Beweis: Einfache Rechnung. $\square$

Satz: (Ähnlichkeitsatz WWW)

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' \text{ und } \gamma = \gamma'.$$



Beweis:

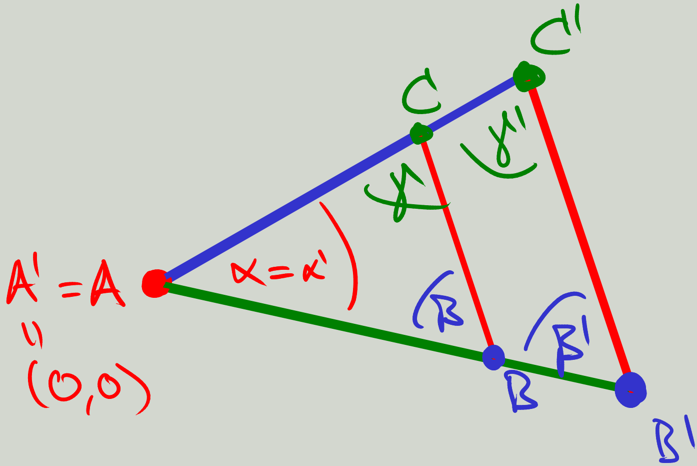
„$\Rightarrow$" folgt aus der Tatsache, dass Bewegungen und Streckungen winkelerhaltend sind.

„$\Leftarrow$" Angenommen

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' \text{ und } \gamma = \gamma'.$$

Nach zwei Bewegungen können wir annehmen, dass $A = A' =$ Ursprung und

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$



Sei s_λ die Streckung mit $s_\lambda(A) = A'$ und $s_\lambda(B) = B'$. Es genügt zu zeigen, dass auch $s_\lambda(C) = C'$.

(1) $\overrightarrow{A\,s_\lambda(C)} = \overrightarrow{s_\lambda(A)\,s_\lambda(C)} = \overrightarrow{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha = \alpha'}}{=} \overrightarrow{AC'}$

(2) $\overrightarrow{B'\,s_\lambda(C)} = \overrightarrow{B'C'}$, da

$$\sphericalangle A B' s_\lambda(C) = \sphericalangle s_\lambda(A)\, s_\lambda(B)\, s_\lambda(C)$$

$$= s_\lambda(\sphericalangle ABC) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft von } s_\lambda}}{=} \sphericalangle ABC = \beta = \beta'$$

$$= \sphericalangle AB'C'.$$

Nach (1) und (2) liegen $s_\lambda(C)$ und C' auf den beiden selben Strahlen, die sich nur in einem Punkt schneiden. Also gilt

$$s_\lambda(C) = C'$$

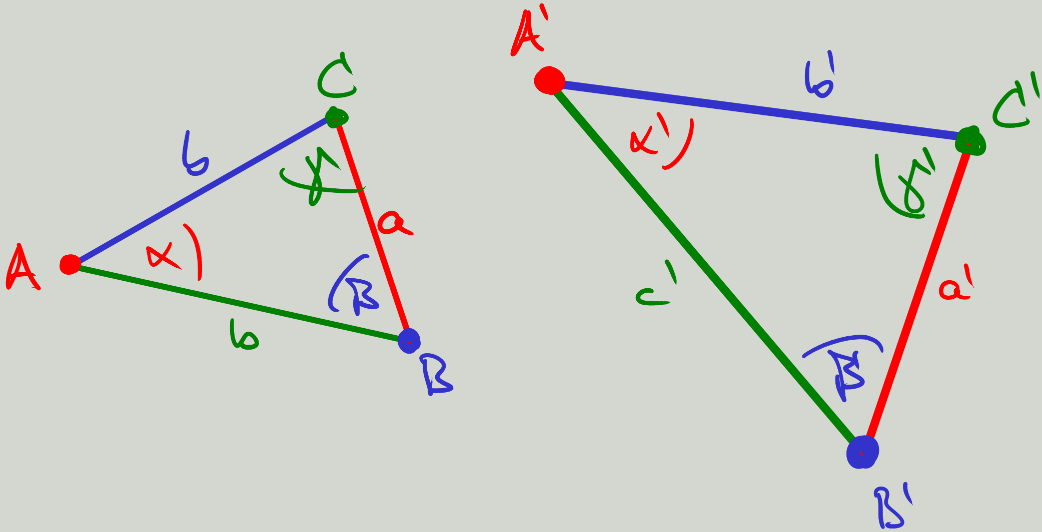
$\boxtimes$

<u>Beobachtung:</u> Nach Innenwinkelsatz genügt es für Ähnlichkeit zu zeigen, dass zwei Winkelpaare gleich groß sind, z.B. $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

Proposition:

Sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke so haben die entsprechenden Seiten die gleichen Längenverhältnisse:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



Beweis:

Aus den grundlegenden Eigenschaften von Streckungen S_λ folgt

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \lambda \qquad \blacksquare$$

Strahlensatz: (7.4)

Sei P der Schnittpunkt von zwei Geraden $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$. Ist $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$, so gilt:

$$\frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PA_2})} = \frac{\ell(\overline{PB_1})}{\ell(\overline{PB_2})} = \frac{\ell(\overline{A_1B_1})}{\ell(\overline{A_2B_2})} \qquad (1)$$

und

$$\frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})} = \frac{\ell(\overline{A_1A_2})}{\ell(\overline{B_1B_2})} \qquad (2)$$

Umgekehrt gilt:

$$\frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PA_2})} = \frac{\ell(\overline{PB_1})}{\ell(\overline{PB_2})}$$

sowie

Fall 1

$$\left(\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PA_2} \text{ und } \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{PB_2}\right)$$

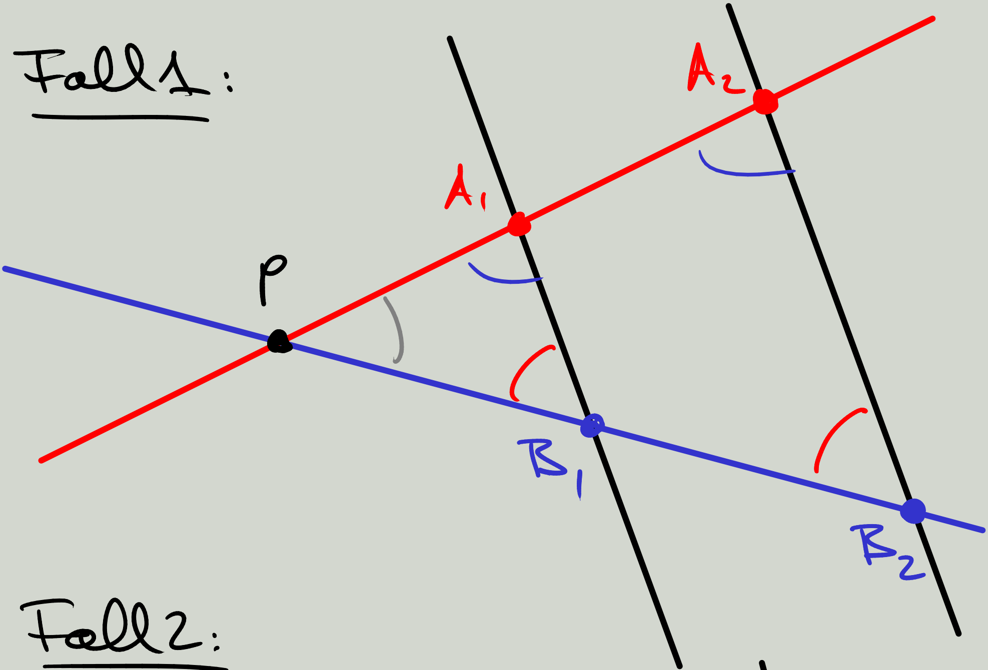
oder

Fall 2

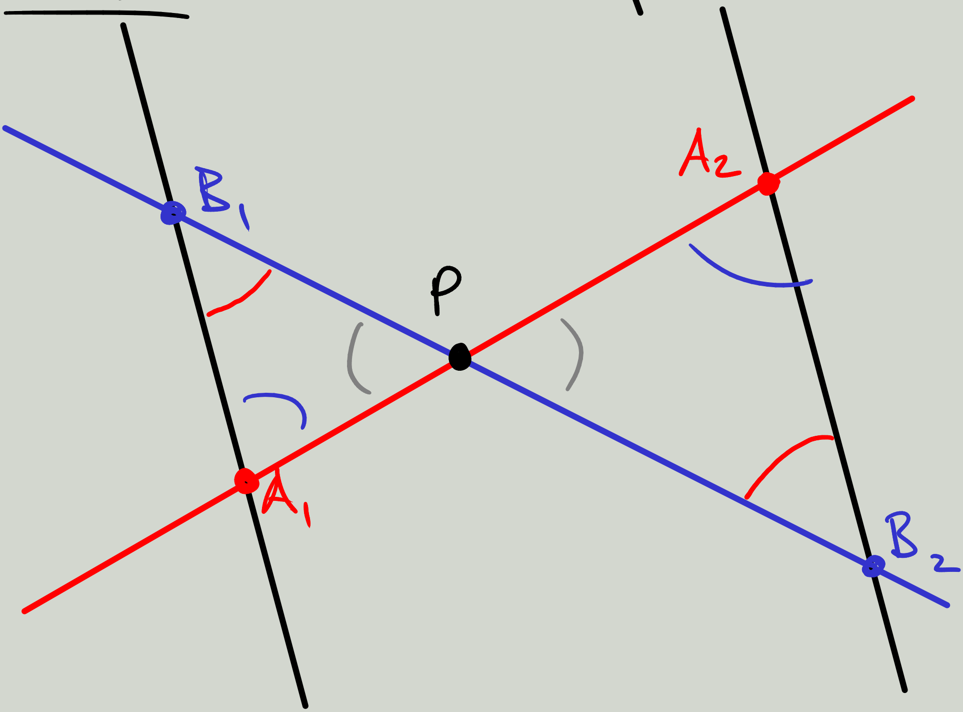
$$\left(\overrightarrow{PA_1} \neq \overrightarrow{PA_2} \text{ und } \overrightarrow{PB_1} \neq \overrightarrow{PB_2}\right)$$

so ist $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$.

Fall 1:



Fall 2:



Beweis:

Für (1) genügt es zu zeigen, dass $\triangle PA_1B_1$ ähnlich ist zu $\triangle PA_2B_2$.

Wir wenden WWW an:

1) $\sphericalangle A_1PB_1 = \sphericalangle A_2PB_2$

Fall 1: Winkel identisch

Fall 2: Scheitelwinkelsatz

2) $\sphericalangle PB_1A_1 = \sphericalangle PB_2A_2$

Fall 1: Stufenwinkelsatz

Fall 2: Wechselwinkelsatz

3) Nach Innenwinkelsatz gilt auch

$$\sphericalangle B_1A_1P = \sphericalangle B_2A_2P$$

(2) folgt direkt aus (1) (Ü13A1)

Nun zur Umkehrung. Sei

$$\lambda := \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PA_2})} = \frac{\ell(\overline{PB_1})}{\ell(\overline{PB_2})}$$

Nach Verschiebung können wir o.E. annehmen, dass $P =$ Ursprung. Dann ist s_λ die Streckung um λ mit Streckzentrum P.

<u>Fall 1:</u> Ist zudem

$$\left(\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PA_2} \text{ und } \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{PB_2}\right)$$

so folgt $s_\lambda(A_2) = A_1$ und $s_\lambda(B_2) = B_1$.

Aus den grundlegenden Eigenschaften von s_λ folgt, dass

$$\begin{aligned} g(A_1, B_1) &= g(s_\lambda(A_2), s_\lambda(B_2)) \\ &= s_\lambda(g(A_2, B_2)) \end{aligned}$$

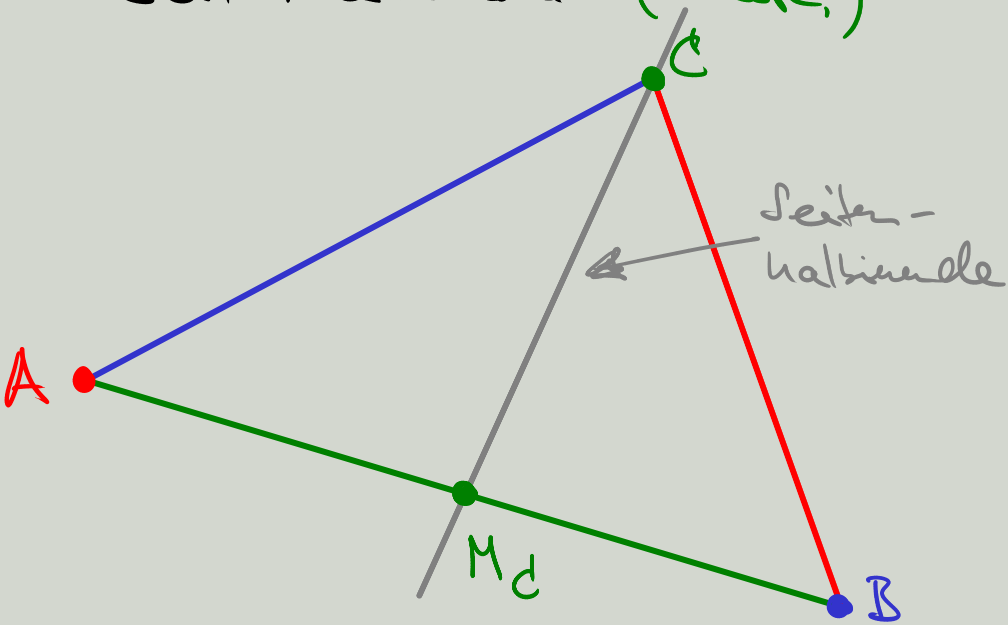
parallel ist zu $g(A_2, B_2)$.

<u>Fall 2:</u> Analoge Argumentation

Ersetze s_λ durch $s_\lambda \circ \varphi$, wobei φ eine Drehung um P um π ist. $\blacksquare$

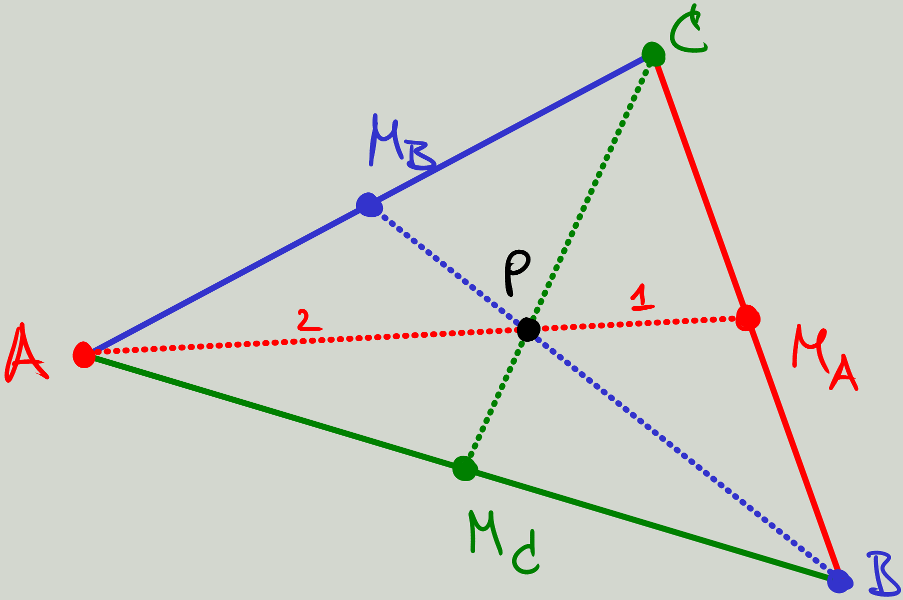
Übersicht: Wichtige Geraden am Dreieck

- Winkelhalbierende (→ Inkreis)
- Mittelsenkrechten (→ Umkreis)
- Höhen
- Seitenhalbierende (heute!)



Definition:

Die Seitenhalbierende zu einer Seite eines Dreiecks ist die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seite sowie den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks geht.



Satz:

Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt P.
Dieser Punkt P zerteilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1; genauer:

$$\frac{\ell(\overline{PA})}{\ell(\overline{PM_A})} = \frac{\ell(\overline{PB})}{\ell(\overline{PM_B})} = \frac{\ell(\overline{PC})}{\ell(\overline{PM_C})} = \frac{2}{1}$$

Beweis: nächste Woche.