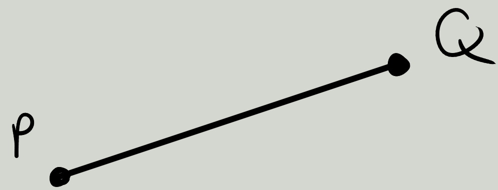
Vorlesung 12:

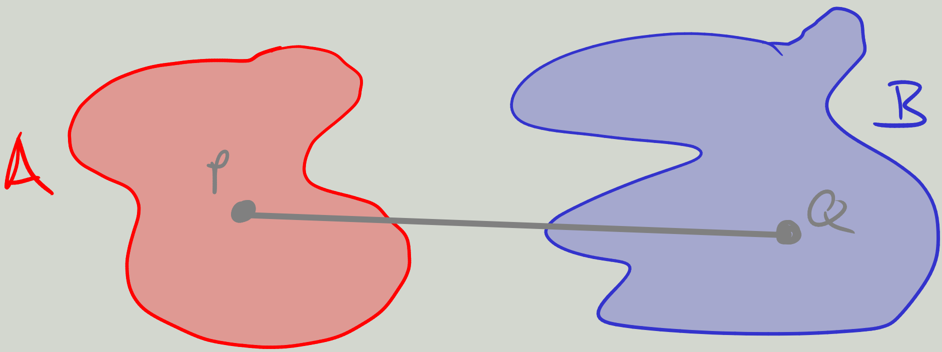
§ Abstände



Für $P, Q \in \mathbb{E}$ gilt:

$$\left(\text{Abstand } d(P,Q) \text{ von } P \text{ nach } Q\right) := \ell(\overline{PQ}).$$

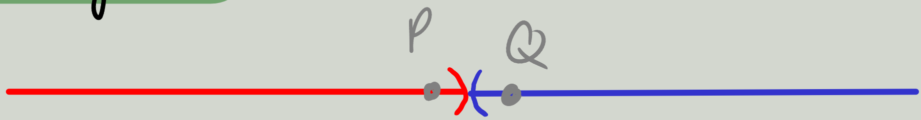
$\hat{=}$ Distanz



Seien $A, B \subseteq \mathbb{E}$ Teilmengen der Ebene so wollen wir den Abstand $d(A,B)$ definieren, als minimalen Abstand zwischen einem Punkt aus A und einem Punkt aus B.

Was heißt das?

Beispiel:



$A = \{(x,0) \mid x<0\}$ $\quad$ $B = \{(x,0) \mid x>0\}$

Der Abstand $d(A,B)$ sollte 0 sein. Aber es gibt keine Punkte $P \in A$ und $Q \in B$ derart, dass $d(P,Q)=0$.

<u>Lösung:</u> ~~Minimum~~ $\rightarrow$ Infimum

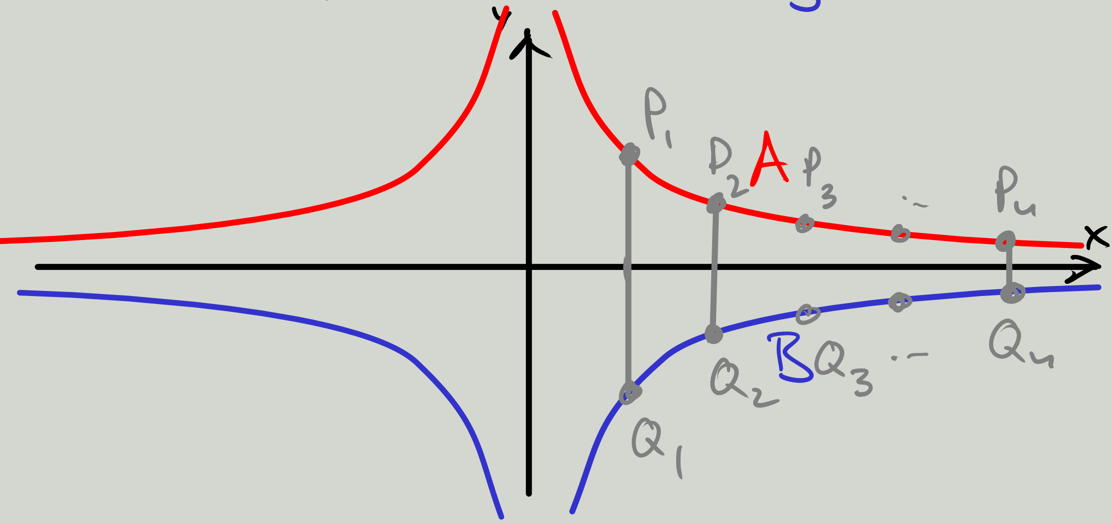
Definition:

$$d(A,B) := \inf\{d(P,Q) \mid P \in A,\ Q \in B\}$$

Beispiel:

1) $A = \{(x, \frac{1}{x^2}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$B = \{(x, -\frac{1}{x^2}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$



Abstand $d(A, B) = 0$, weil wir Folgen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden können derart, dass

(1) $P_n \in A$, $Q_n \in B$

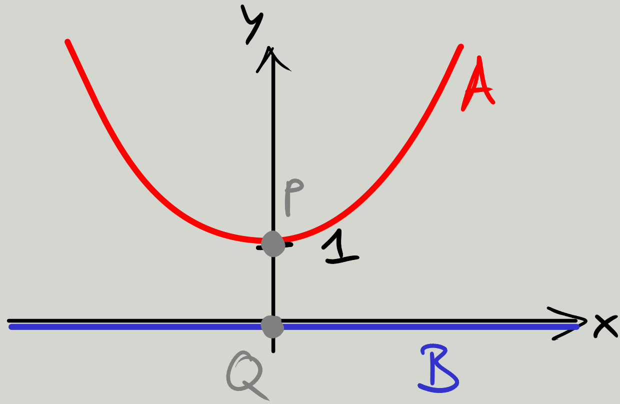
(2) $\lim_{n\to\infty} d(P_n, Q_n) = 0$

z. B. $P_n = (n, \frac{1}{n^2})$ $Q_n = (n, -\frac{1}{n^2})$

$d(P_n, Q_n) = \frac{2}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$.

2) $A = \{(x, x^2+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$B =$ x-Achse



Abstand $d(A, B) \underset{\uparrow}{=} d(P, Q) \underset{\uparrow}{=} 1$ ✓

Warum? Nachrechnen

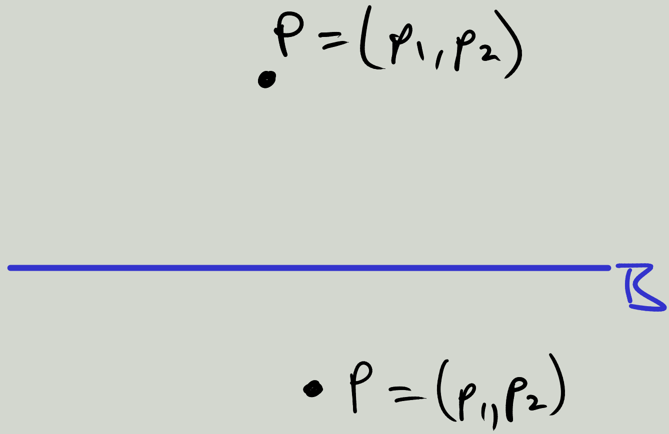
Teilproblem:

Für festes $P \in A$, was ist $d(P, B)$?

Antwort:

Da $B =$ x-Achse, gilt

$$d\left(P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, B\right) = |p_2|$$



Für $P_x := (x, x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt also

$$d(P_x, B) = |x^2+1| = x^2+1$$

Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(P,Q) \mid P \in A,\ Q \in B\} \\ &= \inf\{d(P,B) \mid P \in A\} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &= \inf\{d(P_x, B) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{x^2+1 \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dieser Schritt lässt sich auf viele andere Probleme dieser Art anwenden. (Ü12, A1-2)

Satz: (Abstand Punkt – Gerade) (6.5)

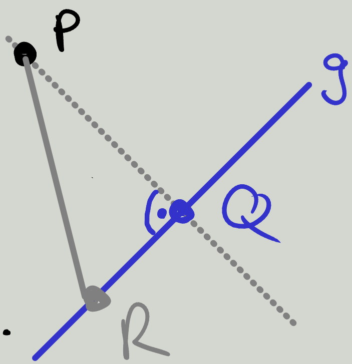
Sei g eine Gerade und $P \in \mathbb{E} \setminus g$.
Sei Q der Lotfußpunkt von P auf g.

Dann gilt:

(1) $d(P, g) = d(P, Q)$.

(2) $d(P, Q) < d(P, R)$

für alle $R \in g \setminus \{Q\}$.



<u>Beweis</u>: (1) folgt direkt aus (2).

$$\big(d(P,R)\big)^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \big(d(P,Q)\big)^2 + \big(d(R,Q)\big)^2$$

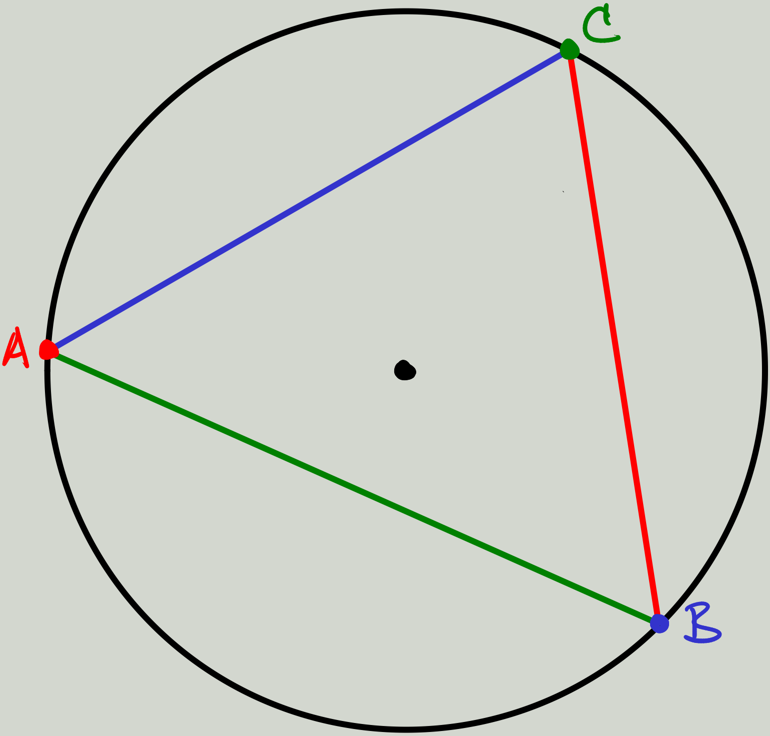
$$> \big(d(P,Q)\big)^2$$

Daraus folgt direkt (2.). $\blacksquare$

Eine analoge Aussage gibt es, um Abstand Punkt-Kreis zu berechnen (Ü12, A1-2).

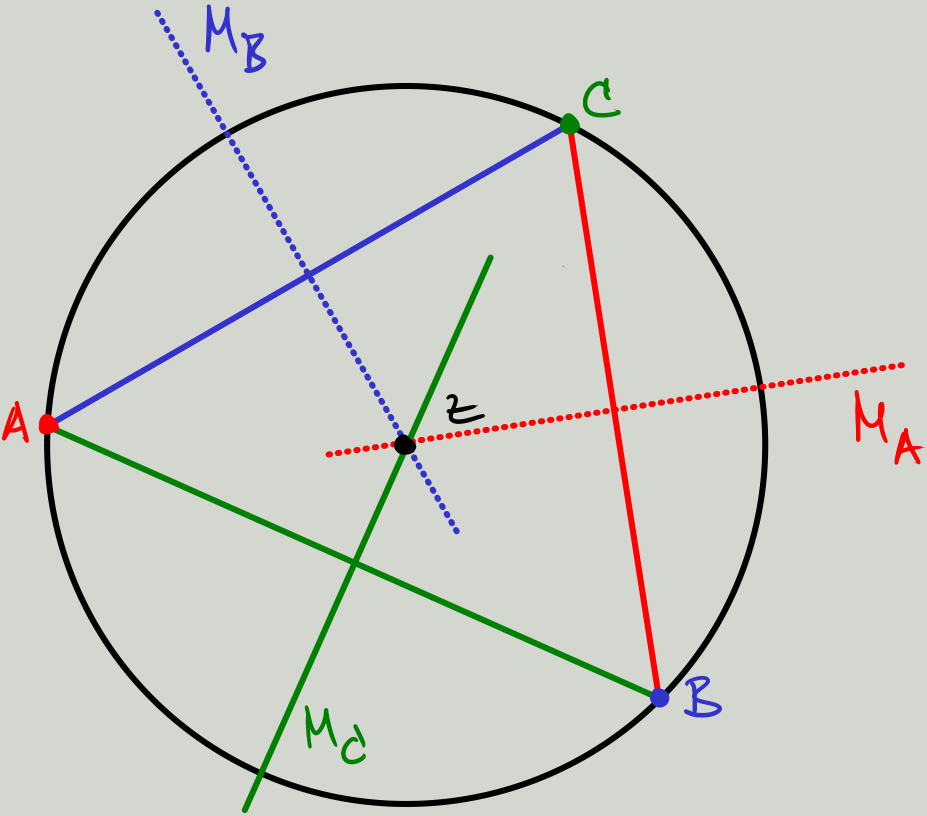
§ Inkreise

Wir hatten bereits in Vorlesung 8 den Umkreis eines Dreiecks besprochen:



Frage: Wie konstruieren wir den Umkreis?

<u>Antwort:</u> Das Zentrum des Umkreises ist gleich dem Schnittpunkt der



zentral für den Beweis war folgendes Lemma:

Lemma: (aus V8, Seite 4)

Mittelsenkrechte von $\overline{CB}$

$$= \{ z \in E \mid \ell(\overline{zC}) = \ell(\overline{zB}) \}$$

Beweis der Konstruktion:

Sei Z = Schnittpunkt von M_A und M_B.

Dann gilt nach Lemma

$$\ell(\overline{ZB}) \underset{Z \in M_A}{\uparrow}{=} \ell(\overline{ZC}) \underset{Z \in M_B}{\uparrow}{=} \ell(\overline{ZA})$$

Also gilt nach Lemma, dass $Z \in M_C$.

Also ist $K(Z, \ell(\overline{ZA}))$ der Umkreis von $\triangle ABC$. ∎

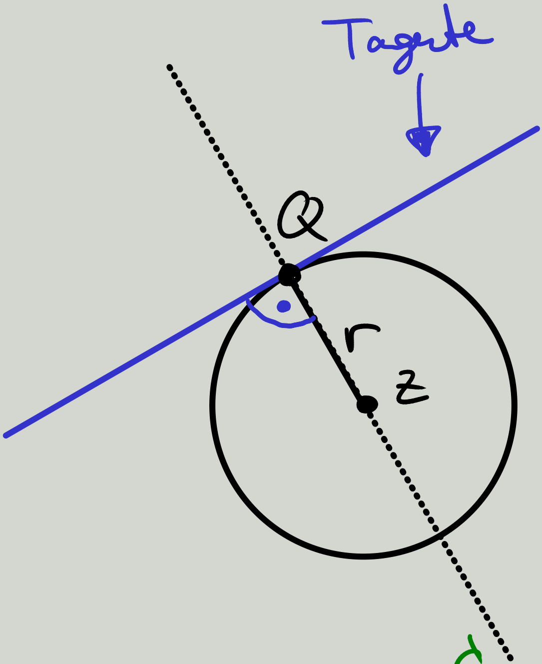
Definition:

Ein <u>Inkreis</u> eines Dreiecks ist ein Kreis, der tangential zu allen drei Seiten des Dreiecks ist.

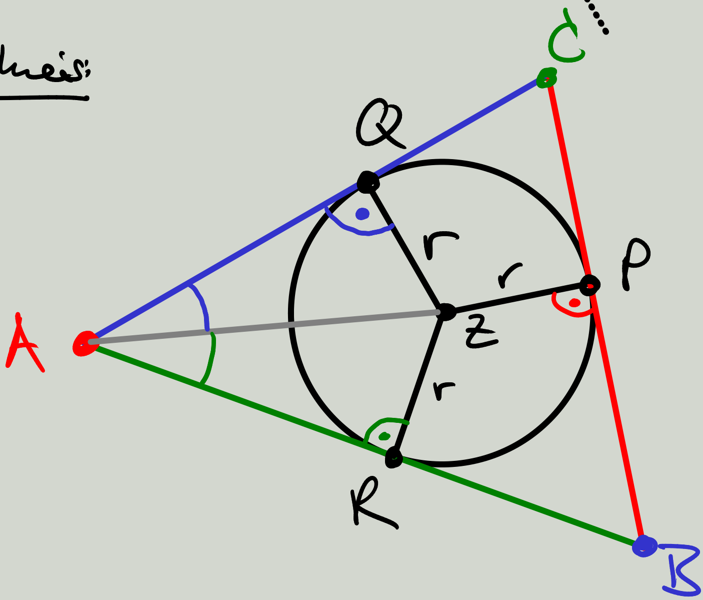
Aus V6 wissen wir:

Tangente zu einem Kreis $K = K(Z, r)$ an einen Punkt $Q \in K$

$=$ Senkrechte zu $g(Z, Q)$ durch Q



Inkreis:



Der Inkreismittelpunkt Z ist also ein Punkt der von allen drei Seiten den gleichen Abstand hat.

__Behauptung:__ $\sphericalangle RAZ = \sphericalangle QAZ$

◀ $\Delta RAZ \cong \Delta QAZ$ nach Kongruenzsatz $SS\frac{\pi}{2}$. ▶

Z liegt also auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$. Dieses Argument zeigt auch:

$$\text{Winkelhalbierende von } \sphericalangle BAC \supseteq \left\{ Z \in \mathbb{E} \;\middle|\; \begin{array}{l} d(Z, g(B,A)) = d(Z, g(A,C)) \\ \text{und } Z \text{ liegt im Inneren des Winkels} \end{array} \right\}$$

Es gilt sogar "=":

Lemma: (6.7)

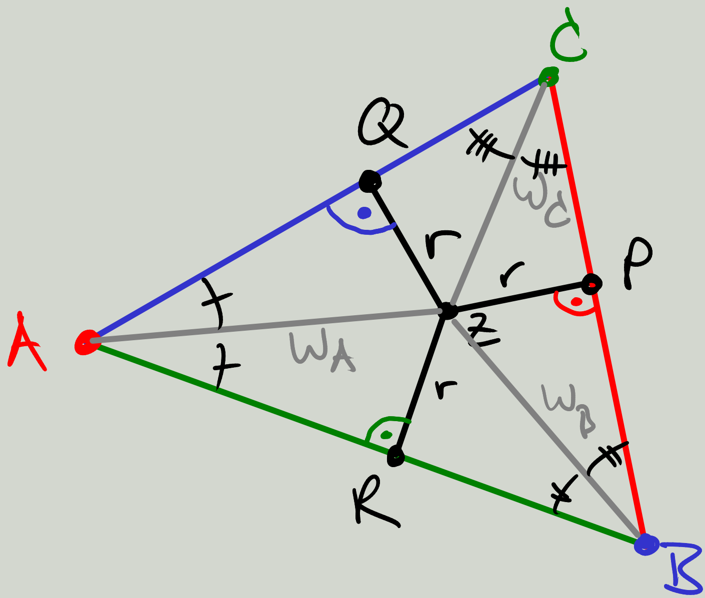
$$\text{Winkelhalbierende von } \sphericalangle BAC = \left\{ Z \in \mathbb{E} \;\middle|\; \begin{array}{l} d(Z, g(B,A)) = d(Z, g(A,C)) \\ \text{und } Z \text{ liegt im Inneren des Winkels} \end{array} \right\}$$

Daraus folgt:

Satz: (6.8)

Die Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.

<u>Beweis des Satzes:</u>



Sei Z der Schnittpunkt von w_A und w_B

Dann gilt:

$$d(z, g(A,C)) \underset{\substack{\uparrow \\ z \in W_A}}{=} d(z, g(B,A)) \underset{\substack{\uparrow \\ z \in W_B}}{=} d(z, g(B,C)).$$

Dies ist genau eine der Bedingungen, um zu prüfen, dass $z \in W_C$.
Zudem liegt z im Innern des Winkels bei C, weil z im Innern der Winkel bei A und B liegt. Also gilt $z \in W_C$.

$\blacksquare$

Korollar: (6.9)

Zu jedem Dreieck gibt es genau einen Inkreis. Der Mittelpunkt ist z, d.h. der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Es bleibt nun noch die Inklusion "$\subseteq$" in unserem Lemma zu zeigen:

Lemma: (6.7)

Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$

$$= \left\{ z \in \mathbb{E} \;\middle|\; \begin{array}{l} d(z, g(B,A)) = d(z, g(A,C)) \\ \text{und } z \text{ liegt im Inneren des Winkels} \end{array} \right\}$$

Dies folgt aus dem Kongruenzsatz WSW.

◀ Übung. ▶

Infos zur Klausur

- Grundsätzlich ist sämtliches Material aus Vorlesungen + Übungen prüfungsrelevant, insbesondere:
  - → Definitionen
  - → Beweise
  - → Übungsaufgaben
- Probeklausur (in ca. 1-2 Wochen)
- Vorlesungszusammenfassungen = Checkliste zur Klausurvorbereitung
- Spickzettel
  - → nicht erlaubt in der Klausur
  - → aber nützlich zur Klausurvorbereitung
- Bei offenen Fragen:
  E-Mail an mich oder Jonas