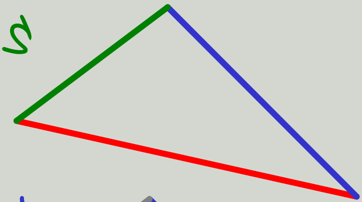
Vorlesung 11:

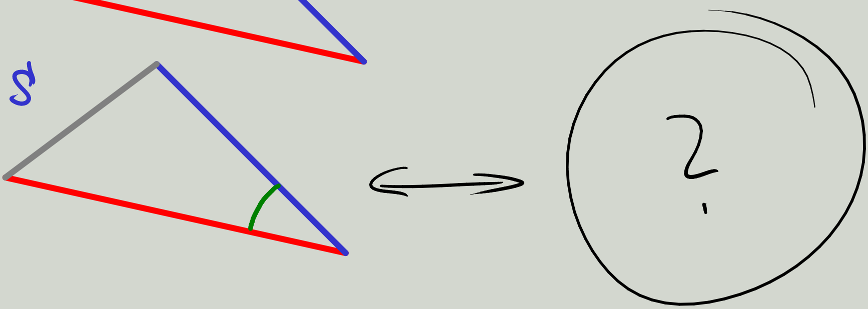
§ Ein weiterer Kongruenzsatz

Kongruenzätze bisher:

SSS

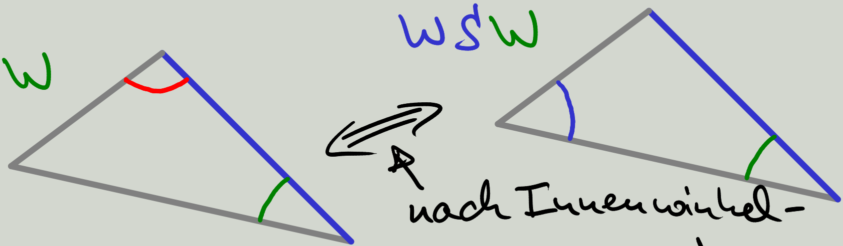


SWS



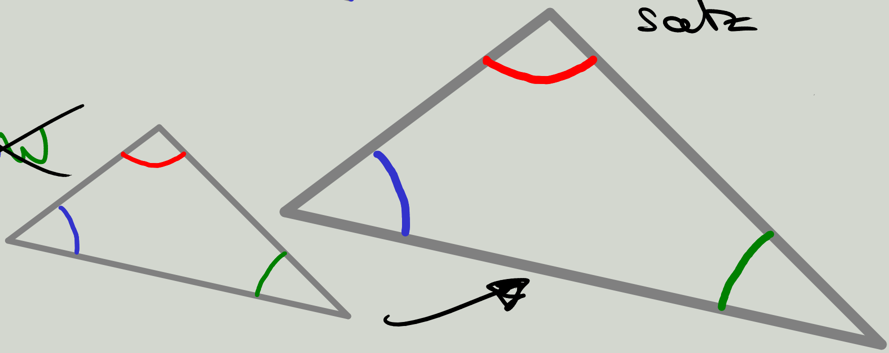
WSW

WSW



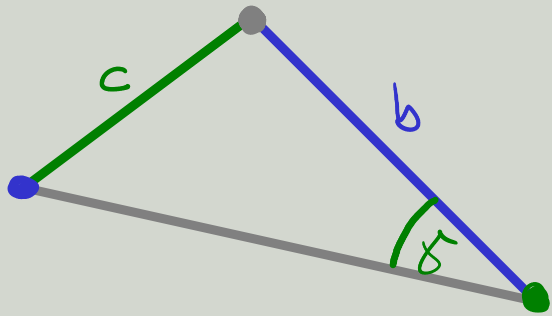
nach Innenwinkelsatz

~~WWW~~

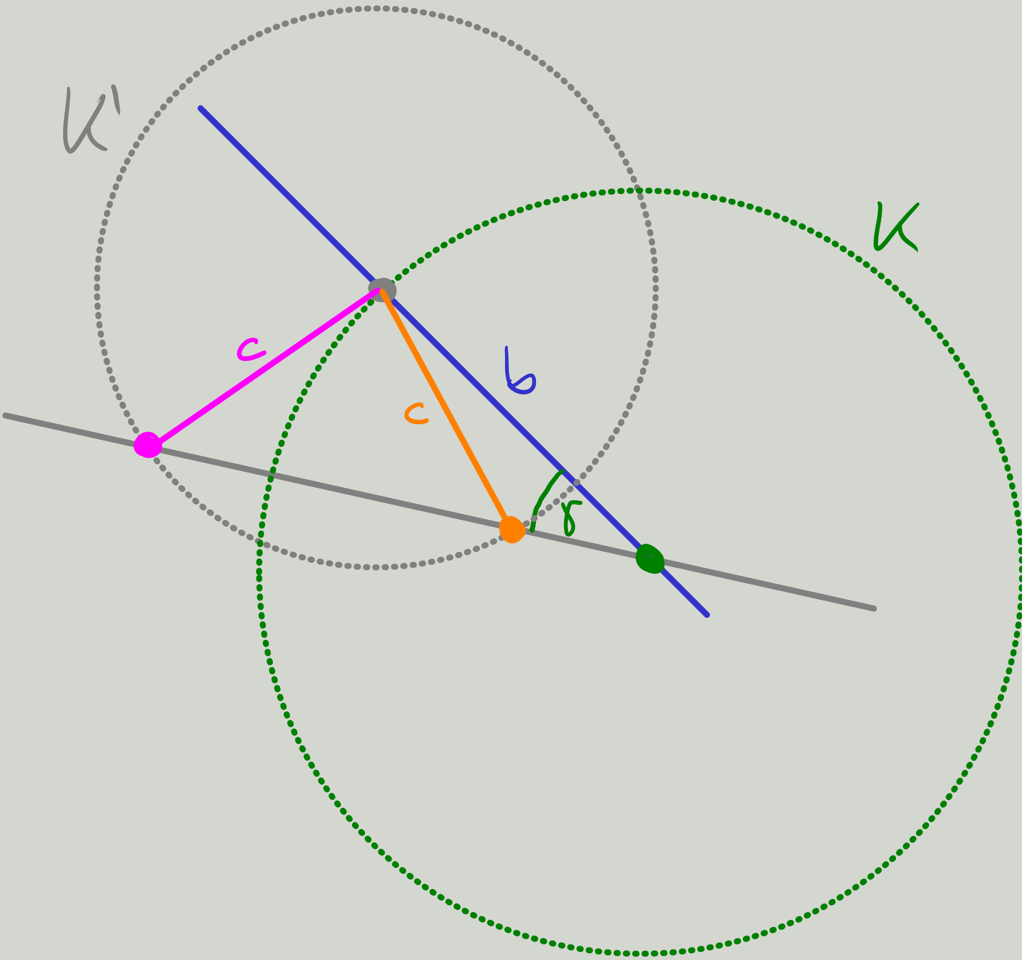


zu (2):

SSW



Frage: Wie würden wir ein Dreieck aus den Angaben SSW konstruieren?



1) Wähle eine beliebige Gerade — sowie einen Punkt • auf —.

2) Trage Winkel γ ab.

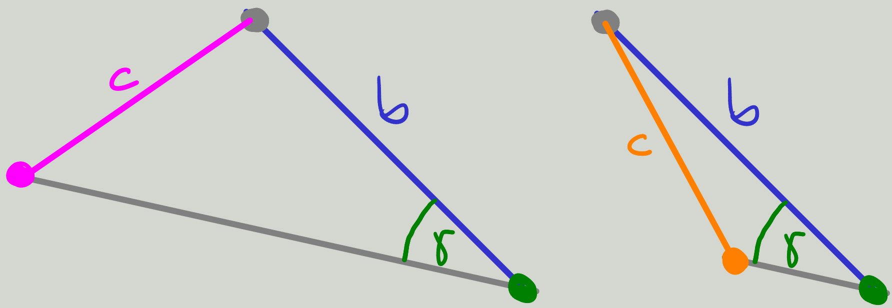
3) Bestimme den Punkt • auf —, indem wir einen Kreis K um • mit Radius b schlagen. Dann gilt • = Schnittpunkt von — mit K.

4) Bestimme den Punkt • auf —, indem wir einen Kreis K' um • schlagen mit Radius c.

<u>Problem:</u> Es kann zwei Schnittpunkte von K' mit — geben, nämlich hier: • und • !

$\boxed{\text{Also gilt SSW im Allgemeinen nicht!}}$

Hier erhalten wir zwei Dreiecke



mit denselben Seiten b und c sowie denselben Winkel γ. Aber die Dreiecke sind nicht kongruent, da die Seiten — nicht gleich groß sind.

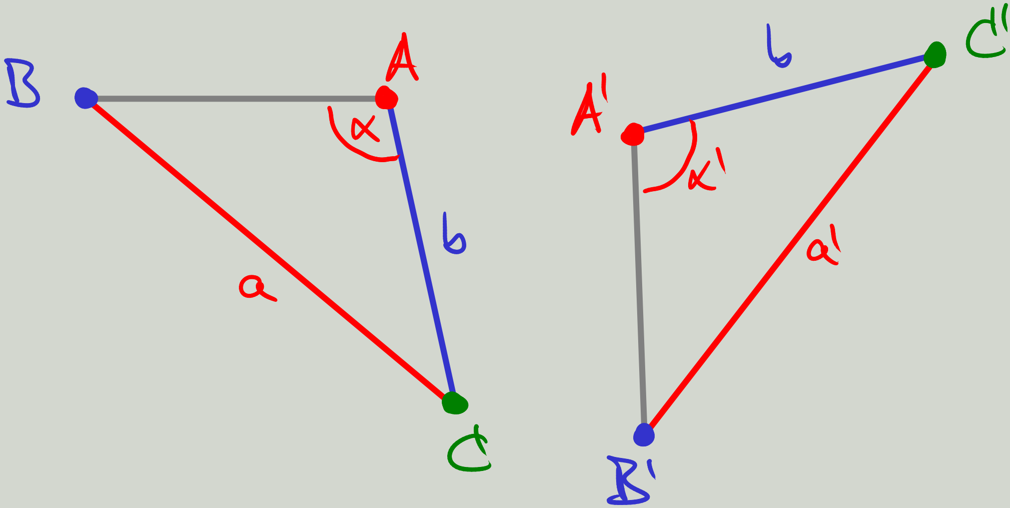
Kongruenzsatz SsW: (6.4)

Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke derart, dass

$$a = a' > b = b' \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha'.$$

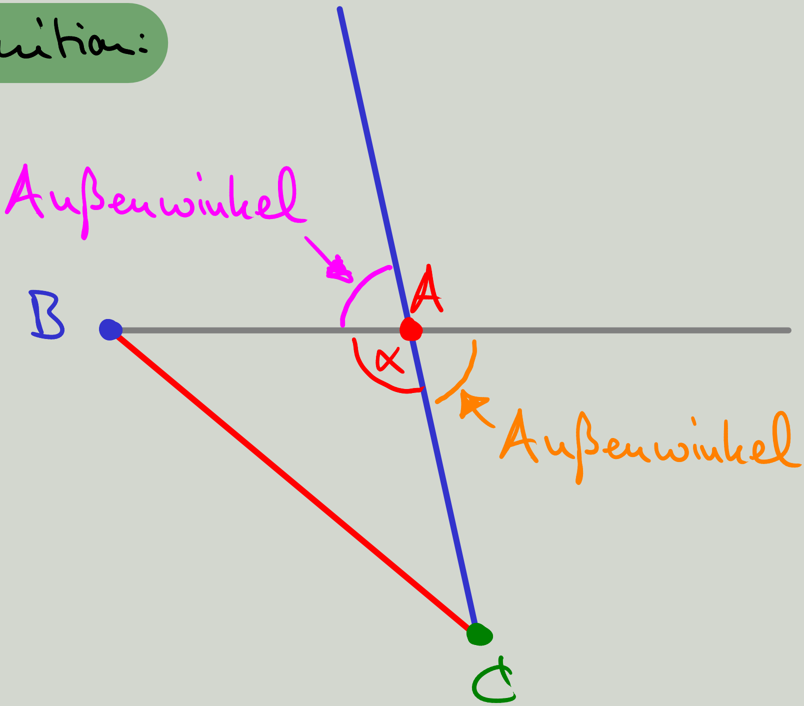
Dann sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

Wichtig!



Vorbereitung für den Beweis:

Definition:



Zu jedem Eckpunkt eines Dreiecks gibt es zwei Außenwinkel. Sie sind gleich groß nach Scheitelwinkelsatz.

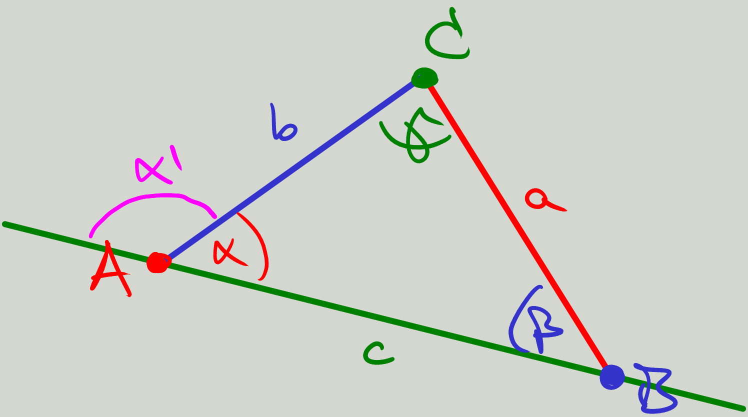
Außenwinkelsatz: (6.2)

In jedem Dreieck gilt: Die Außenwinkel an einem Eckpunkt ist größer als jeder der Innenwinkel an den anderen beiden Eckpunkten.

Beweis:

Nach Innenwinkelsatz gilt für jedes Dreieck $\triangle ABC$:

$= \pi$.



Für
$$\alpha' = (\text{Außenwinkel bei } A)$$
gilt:

Also folgt
$$\alpha + \alpha' = \pi = \alpha + \beta + \gamma$$
Somit gilt
$$\alpha' = \beta + \gamma.$$
Also folgt der Satz aus $\beta > 0$ und $\gamma > 0$. ■

Satz: (6.3)

In jedem Dreieck $\triangle ABC$ gilt:
$$a < b \iff \alpha < \beta$$

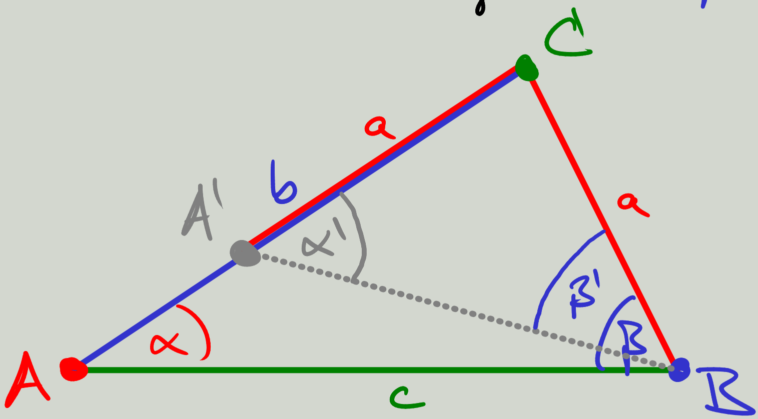
<u>Frage:</u> Gilt auch
$$a = b \iff \alpha = \beta \text{ ?}$$

<u>Antwort:</u> Das ist der Satz

gleichschenklig $\iff$ gleichwinklig!

Beweis vom Satz:

„⇒" Sei $a < b$. Zu zeigen: $\alpha < \beta$



Sei A' der Punkt auf der Seite b, der von C den Abstand a hat.

Sei α' = Außenwinkel des Dreiecks $\Delta ABA'$ am Punkt A'. Also gilt nach Außenwinkelsatz

$$\alpha < \alpha'. \qquad (1)$$

Sei β' = Innenwinkel von $\Delta BCA'$ an dem Eckpunkt B. Es gilt:

$$\beta' < \beta \qquad (2)$$

Es würde ausreichen zu zeigen,

dass $\alpha' \leq \beta'$ ist, denn dann wäre

$$\alpha \underset{(1)}{<} \alpha' \leq \beta' \underset{(2)}{<} \beta$$

Es gilt sogar $\alpha' = \beta'$, da $\triangle BCA'$ gleichschenklig ist. Also gilt

$$\alpha \underset{1}{<} \alpha' = \beta' \underset{(2)}{<} \beta .$$

„$\Leftarrow$" Sei $\alpha < \beta$. Zu zeigen: $a < b$.

In „$\Rightarrow$" haben wir gezeigt, dass

$$a < b \Rightarrow \alpha < \beta$$

Analog können wir zeigen

$$b < a \Rightarrow \beta < \alpha .$$

Ist also $\alpha < \beta$, so folgt aus ,

dass $b < a$ nicht gelten kann,

denn dann wäre ja $\beta < \alpha$.

Also folgt aus $\alpha < \beta$, dass $b \geq a$.

Wäre $b = a$, dann haben wir ja bereits vor dem Beweis gesehen, dass dann auch $\alpha = \beta$. Also folgt $b > a$. ∎

Wir sind nun bereit für den Beweis von SsW. Zur Erinnerung:

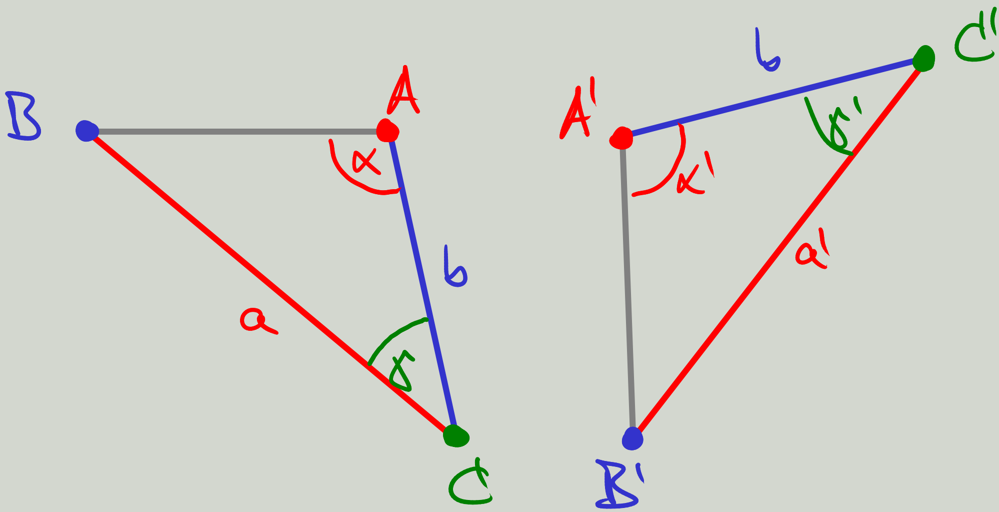
Kongruenzsatz SsW: (6.4)

Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke derart, dass

$$a = a' \geq b = b' \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha'.$$

Dann sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

Wichtig!



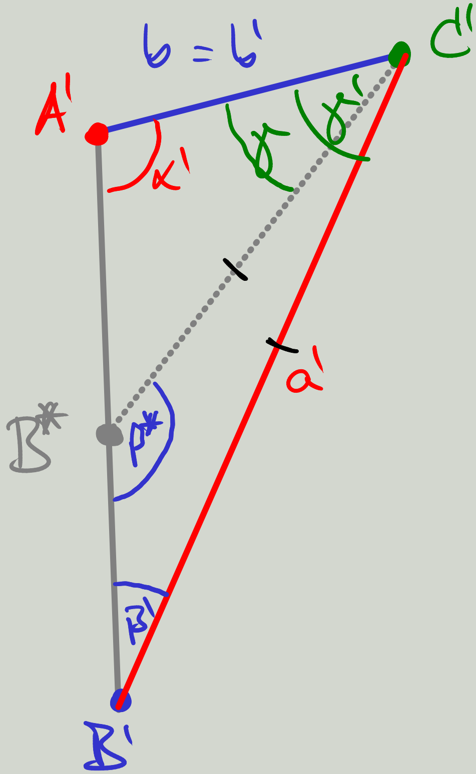
Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass $\gamma = \gamma'$, denn dann können wir WSW anwenden.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Also angenommen, $\gamma \neq \gamma'$. Dann gilt entweder $\gamma > \gamma'$ oder $\gamma < \gamma'$.

OBdA nehme an, dass $\gamma < \gamma'$.



Zeichne einen Strahl ……………
ausgehend von C' mit einem Winkel γ
zur Seite b im Inneren des Winkels γ'.
Da $\gamma < \gamma'$, schneidet …………… die
Seite $\overline{A'B'}$ in einem Punkt B^*.

Nach WSW sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B^*C'$
kongruent. Insbesondere gilt

$$a' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Voraussetzung}}}{=} a = \ell(\overline{B^*C'}).$$

Also gilt $\beta' = \beta^* := \sphericalangle C'B^*B'$.
Nun wenden wir den Außenwinkelsatz
auf β^* an: $\alpha' < \beta^* = \beta'$.

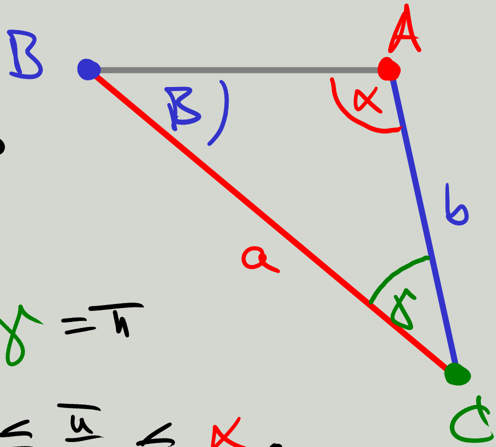
Also folgt $a' < b'$.

Dies steht im Widerspruch zur
Annahme, dass $a' \geq b'$. ↯ $\blacksquare$

Corollar: (vergleiche mit SS$\frac{\pi}{2}$, 6.1)

SSW gilt auch, wenn der gegebene Winkel $\geq 90°$ groß ist.

◄ Wir führen diese Aussage auf SsW zurück.



Ist $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$\alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Also gilt $\beta \leq \frac{\pi}{2} \leq \alpha$.

Also folgt $b \leq a$.

Also folgt die Behauptung aus SsW. ►