Vorlesung 10:

... letzte Woche ...

Anwendungen des Innenwinkelsatzes

Satz von Thales:

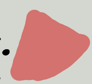
Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises K.
Dann gilt für jeden Punkt C $(\neq A, B)$ auf K:

$$\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$$

Allgemeiner gilt:

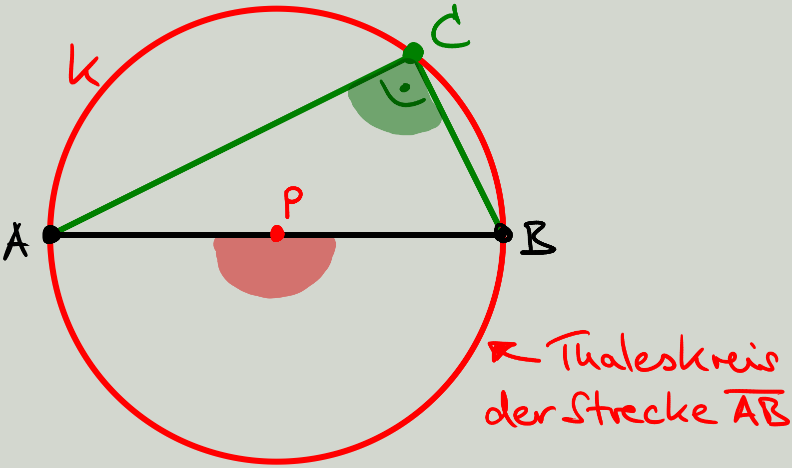
Peripheriewinkelsatz:

Seien K ein Kreis mit Mittelpunkt P sowie $A, B \in K$ zwei verschiedene Punkte. Dann gilt für jeden Punkt $C \in K$, der auf der gleichen Seite von $g(A,B)$ liegt wie P,

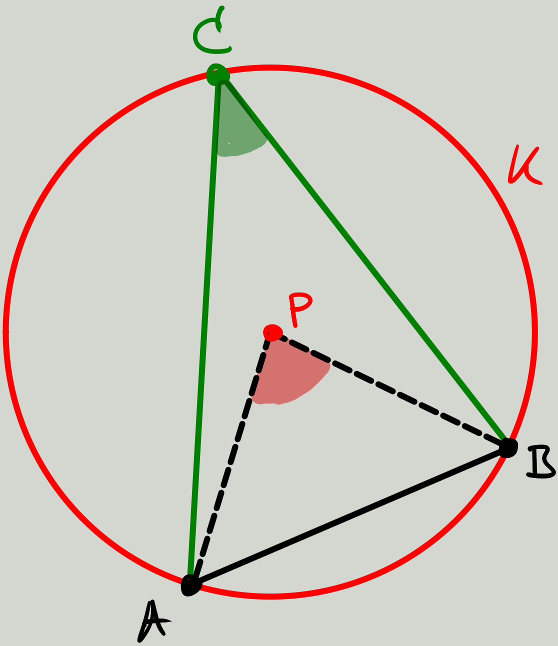
$\sphericalangle ACB =$  $= \frac{1}{2} \cdot$  $= \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle APB$

Insbesondere ist der Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$ unabhängig von C.

Satz des Thales:



Peripheriewinkelsatz:

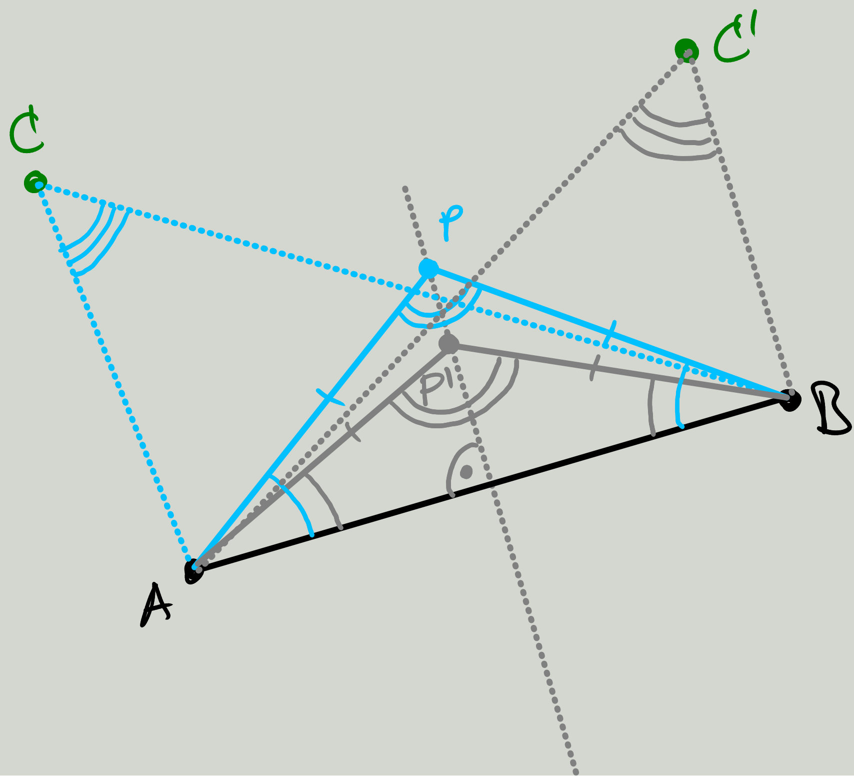


Wir können die Aussage des Peripheriewinkelsatzes verstärken:

Satz:

Seien $\overline{AB}$ eine Strecke mit $A \neq B$ und C und C' zwei Punkte, die auf der gleichen Seite von $g(A,B)$ liegen.
Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \text{Umkreis von } \triangle ABC \\ = \\ \text{Umkreis von } \triangle ABC' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B \right)$$



◀ Seien P und P' die Zentren der Umkreise von $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$. Diese Punkte liegen (nach Konstruktion der Umkreise) auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Dann gilt:

$$\left(\text{Umkreise sind gleich}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(P = P' \text{ und } \ell(\overline{PA}) = \ell(\overline{P'A})\right)$$

$$\Leftrightarrow P = P'$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle = \sphericalangle$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle = \sphericalangle$$ nach Innenwinkelsatz + $\triangle ABP$ und $\triangle ABP'$ gleichschenklig.

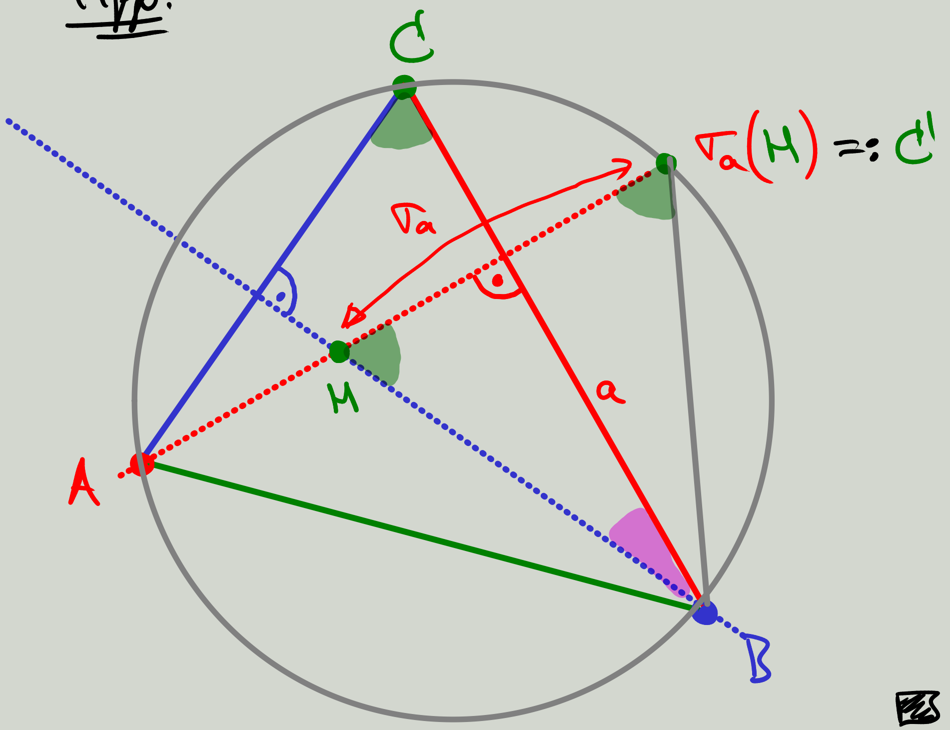
$$\Leftrightarrow \sphericalangle = \sphericalangle$$ nach Peripheriewinkelsatz. ▶

Anwendungsbeispiel:

Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei σ_a die Spiegelung entlang der Seite $a = \overline{BC}$. Dann liegt $C' = \sigma_a(H)$ auf dem Umkreis K von $\triangle ABC$.

Beweis*: Hausaufgabe.

Tipp:



*) nicht klausurrelevant

Vielecke:

Definition:

Sei $n>2$ positive ganze Zahl.
Ein n-Eck (auch genannt Vieleck, Polygon, n-Gon) ist ein Tupel $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ an paarweise verschiedenen Punkten $P_i \in E$.

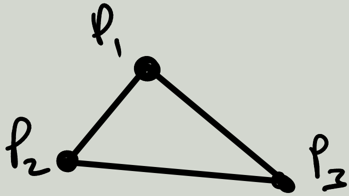
geordnete Menge

Bezeichnungen:

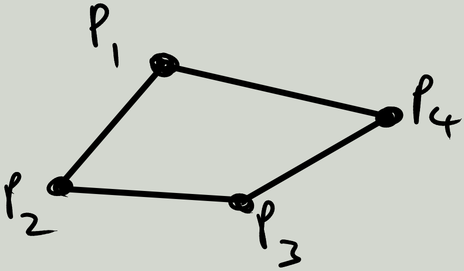
- P_i heißen Eckpunkte
- $\overline{P_i P_{i+1}}$ $(1 \le i \le n)$ heißen Kanten
  (Konvention: $P_{n+1} := P_1$, also $\overline{P_n P_{n+1}} = \overline{P_n P_1}$)
- Alle anderen Strecken der Form $\overline{P_i P_j}$ heißen Diagonalen

Beispiele:

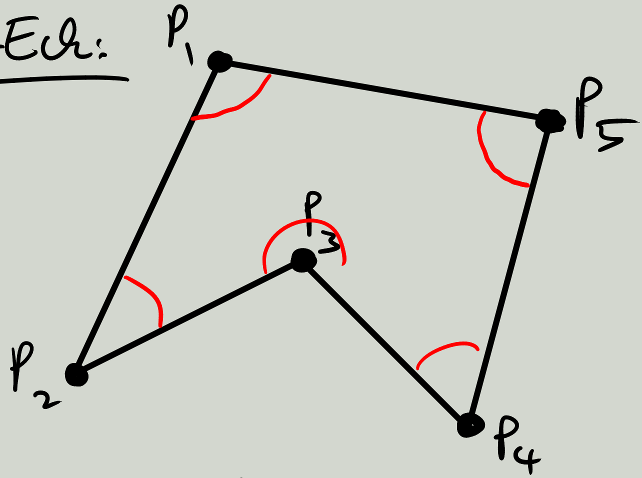
Dreiecke:



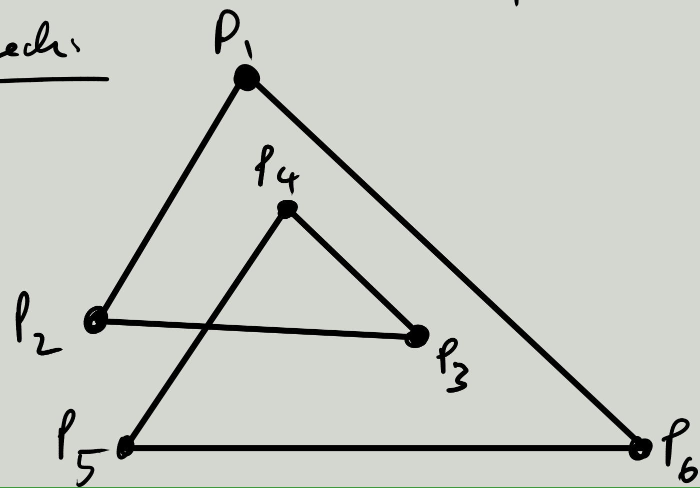
Viereck:



5-Eck:



Sechseck:



Definition:

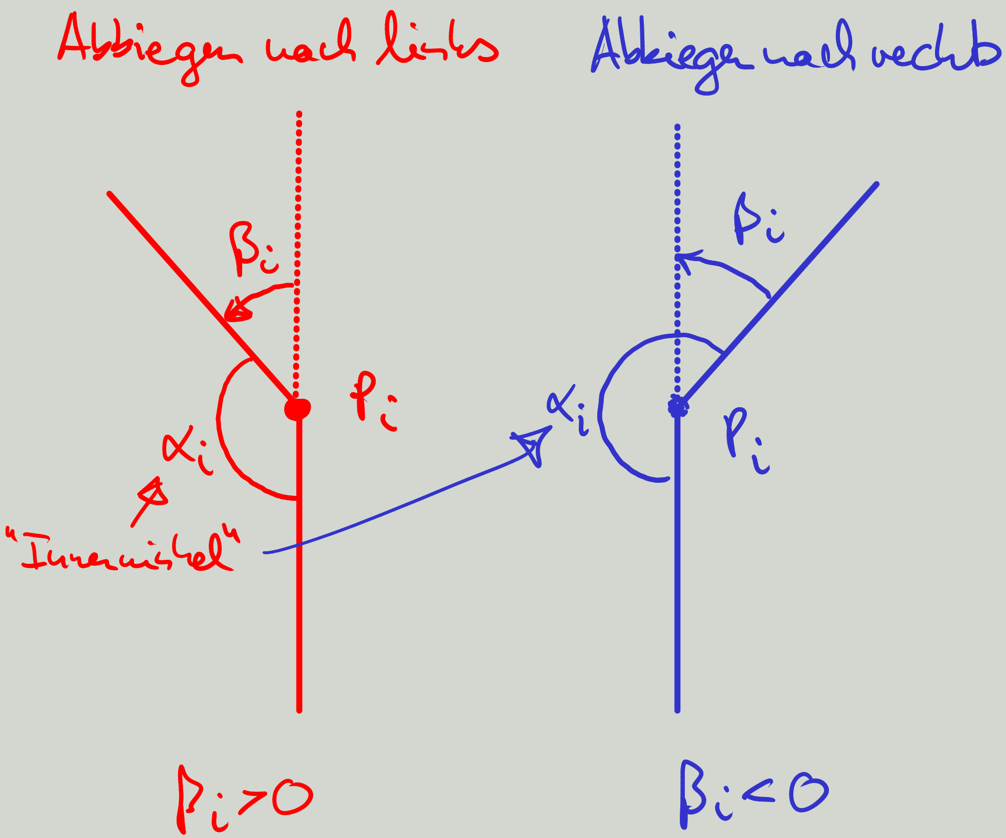
Ein n-Eck ist <u>einfach</u>, wenn sich die Kanten nur an den Eckpunkten schneiden.

Satz:

Die Summe der Innenwinkel in einem <u>einfachen</u> n-Eck ist gleich $(n-2)\cdot\pi$.

<u>Frage:</u> Was ist ein Innenwinkel?

An jeder Ecke gibt es 2 Möglichkeiten:



Bezeichnungen: $(i=1,\dots,n)$

α_i = "Innenwinkel" bei P_i

β_i = "Abweichung von Geradeaus" bei P_i

Es gilt:

$$\alpha_i + \beta_i = \pi$$

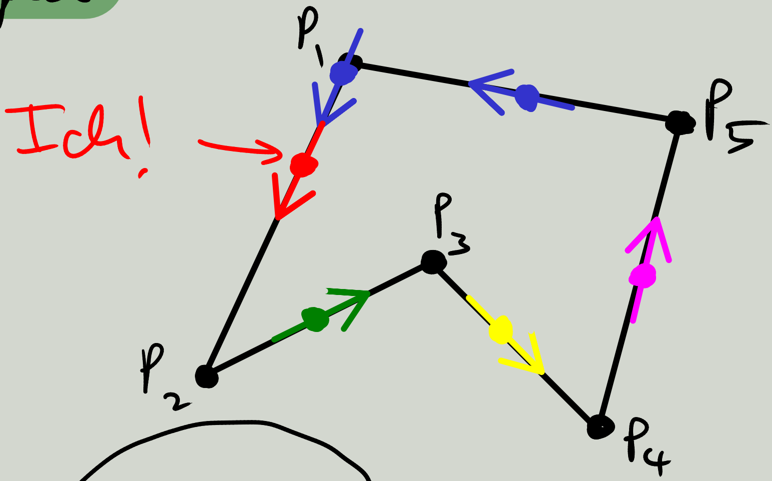
Jetzt nehme Summe über alle $i=1,\dots,n$:

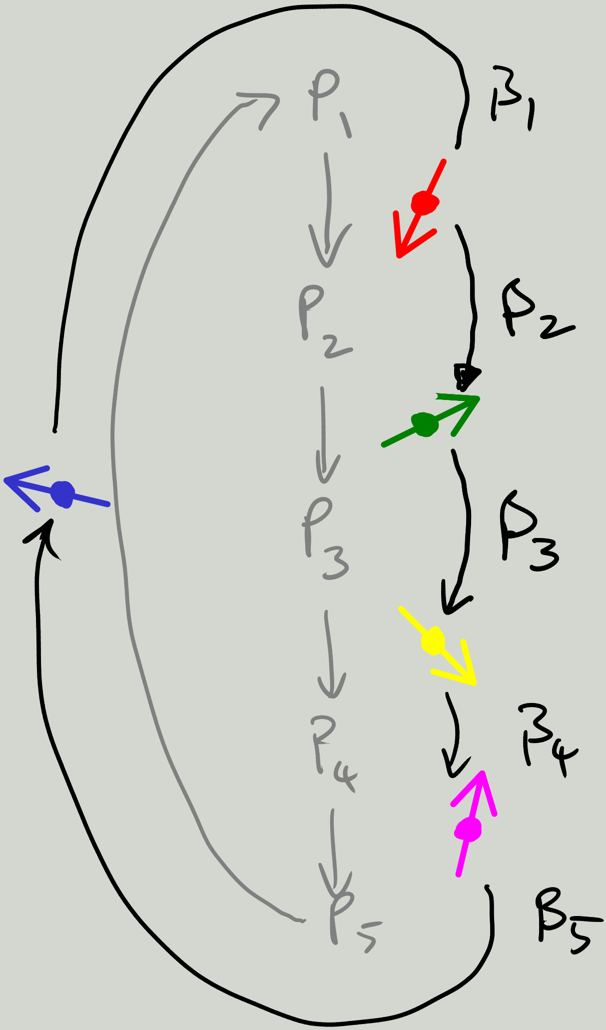
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)}_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) + (\beta_1 + \dots + \beta_n)} = \sum_{i=1}^{n} \pi = n \cdot \pi$$

Also ist die Summe der Innenwinkel gleich

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) = n \cdot \pi - \underbrace{(\beta_1 + \dots + \beta_n)}_{?}$$

Beispiel:





Fazit: Die Summe $(\beta_1+\dots+\beta_n)$ ist ein Vielfaches von 2π, da die Orientierung am Start gleich der Orientierung nach Durchlaufen des Polygons ist:

$$\beta_1+\dots+\beta_n = 2\pi\cdot k$$

Satz

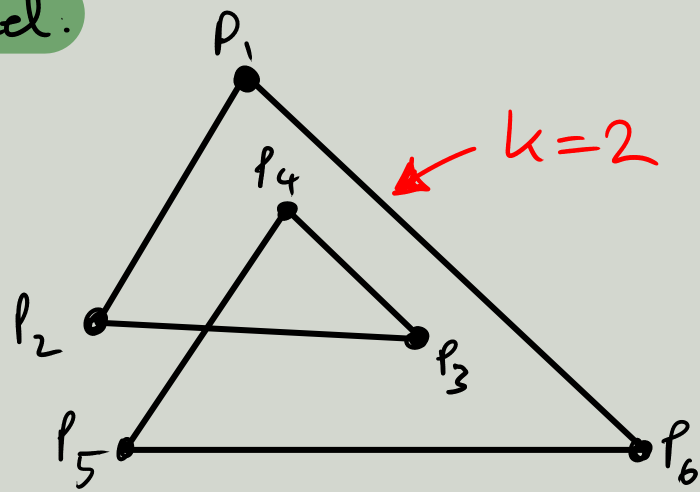
Für jedes n-Eck gibt es eine ganze Zahl k derart, dass

$$\text{Innenwinkelsumme} = \pi\cdot n - 2\pi\cdot k = \pi\cdot(n-2\cdot k)$$

Definition: (nicht-standard)

Die Zahl k heißt die Rotationszahl des n-Ecks.

Beispiel:



Es ist leicht zu zeigen, dass für einfache n-Ecke stets $k=1$ gilt. Anschaulich ist das klar, daher sparen wir uns den Beweis. $\blacksquare$

Frohe Weihnachten!