topologie algébrique

résumés de cours

MAT 623/813, hiver 2018

mardi 10:30–12:20 (local D3-2030) | jeudi 9:00–10:00 (local D3-2033)

Claudius Zibrowius

Notions de base

MA 09/01a | 1 | Motivation et les définitions de base

- Un exemple typique: $S^1 \hookrightarrow D^2 \to S^1 = 1_{S^1}$
- Les ouverts/les fermés, fonctions continues, homéomorphismes
- Exemples: la topologie grossière et discrète, les espaces métriques

MA 09/01b | 2 | La catégorie des espaces topologiques

- Catégories (par exemple: Top, Gr, Ab, etc)
- La catégorie des catégories: foncteurs et l'exemple $S^1 \hookrightarrow D^2 \to S^1 = 1_{S^1}$
- Les deux foncteurs π_1 et H_1 comme invariants topologiques

VE 12/01 | 3 | Nouveau de vieux I: la topologie induite

- La topologie induite et sa propriété universelle (pour une et plusieurs applications)
- Exemples: les topologies de sous-espaces et produits et ses propriétés universelles

MA 16/01a | 4 | Nouveau de vieux II: la topologie co-induite

- La topologie co-induite et sa propriété universelle
- Exemples: les topologies de quotients, sommes et pushouts et ses propriétés universelles
- Exemples: les complexes cellulaires (finies)

MA 16/01b | 5 | Les propriétés de base: Hausdorff et compacité

- Des espaces Hausdorff et des espace compactes
- Diverses propositions concernant la relation entre Hausdorff et compacité
- Théorème: Une bijection continue d'un espace compacte à un espace Hausdorff est un homéomorphisme.

Homotopies, chemins et le groupe fondamental

JE 18/01 | 6 | L'homotopie

- Homotopies entre deux applications
- Espaces homotopiquement équivalents
- Rétractes, rétractes par déformation, rétractes forts par déformation

MA 23/01a | 7 | Le foncteur π_0 et la connexité

- Chemins et lacets
- Composantes connexes d'un espace et π_0
- Connexes et connexe par arcs

MA 23/01b | 8 | Le foncteur π_1

— Homotopies entre chemins
— La catégorie des espaces pointés et π_1
— Simple connexité
— Dépendance du groupe fondamental au point base

JE 25/01 | 9 | Le groupe fondamental d'un cercle

— $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
— Relèvements le long l'application $p : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$

MA 30/01a | 10 | Fin de la démonstration $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et applications

— Démonstration du lemme à propos des relèvements le long $p : \mathbb{R} \to S^1$
— Le problème $S^1 \hookrightarrow D^2 \to S^1 = 1_{S^1}$ et le théorème du point fixe de Brouwer

MA 30/01b | ★ | Exercices 1

Le théorème de Seifert-van-Kampen

JE 01/02 | 11 | Un peu de la théorie des groupes

— Le groupe libre sur un alphabet et sa propriété universelle
— Présentations des groupes et leur propriété universelle

MA 06/02a | 12 | Le théorème de Seifert-van-Kampen

— Le produit libre, le produit libre amalgamé et ses propriétés universelles
— Le théorème de Seifert-van-Kampen

MA 06/02b | 13 | Les groupes fondamentaux des complexes cellulaires

— π_1 et les attachements des n-cellules
— Exemples: les groupes fondamentaux des wedges des cercles et du tore

JE 08/02 | 14 | Seifert-van-Kampen pour les recouvrements fermés

— cor: π est un foncteur qui est surjectif au niveau des objets
— Les groupes fondamentaux des wedges avec points de base qui sont rétractes de voisinage
— Les groupes fondamentaux des surfaces orientable et non orientable

MA 13/02a | 15 | La démonstration du théorème de Seifert-van-Kampen

— La démonstration de la version du théorème pour des recouvrements ouverts infinis

MA 13/02b | ★ | Exercices 2

Revêtements et la correspondance de Galois

JE 15/02 | 16 | Revêtements

— revêtements, relèvements et lemmes des relèvements des chemins et des homotopies
— lemme: Si $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ est un revêtement, $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est injective.
— lemme sur l'action de $\pi_1(X)$ sur $p^{-1}(x_0)$.

MA 20/02 | ★ | 10:30–12:20 Examen intra

JE 22/02 | 17 | Un critère très utile de relèvement

- critère: Si $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ est un revêtement et Y un espace sympa, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ a un relèvement $\tilde{f} \colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \Leftrightarrow \operatorname{im} p_* \supseteq \operatorname{im} f_*$. Dans ce cas, $\tilde{f}$ est unique.
- cor: Deux revêtements pointés et sympa sont homéomorphes si leurs sous-groupes sont égales.

MA 27/02a | 18 | La correspondance de Galois

- le théorème général (sans démonstration)
- la correspondance de Galois pour les complexes cellulaires

MA 27/02b | 19 | Perspectives: groupes d'homotopies et groupes d'homologie

- motivation

Homologie

JE 01/03 | 20 | Un peu d'algèbre homologique

- Complexes de chaînes (ccs), et leurs groupes d'homologie
- Suites exactes et suites exactes courtes
- Morphismes des ccs et homotopies entre eux
- Lemme: Un isomorphisme à homotopie près entre deux ccs induit un isomorphisme entre leurs homologies

MA 06/03 et VE 09/03 Relâche des activités pédagogiques

MA 13/03a | 21 | Lemme du serpent et la suite exacte longue induite

- Le lemme du serpent
- Corollaire: une suite exacte courte des ccs induit une suite exacte longue entre leurs homologies

MA 13/03b | ★ | Exercices 3

JE 15/03 cours annulé

MA 20/03a | 22 | L'homologie singulière

- Simplex singulières
- Cycles, bords et l'homologie singulière

MA 20/03b | 23 | L'interprétation de l'homologie singulière dans les dimensions 0 et 1

- L'interprétation de H_0 et l'homologie d'un point.
- Théorème: H_1 est l'abélianisé de π_1.

JE 22/03 | 24 | L'invariance et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris

- L'homologie est un invariant de l'homotopie
- Théorème (sans démonstration): $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ est une équivalence d'homotopie
- Théorème de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris

MA 27/03a | 25 | L'homologie relative et excision

— L'homologie relative et les suites exactes longes des couples et triples

— Le théorème d'excision et ses corollaires

— Applications: l'homologie des wedges et des sphères

— Corollaire: ∂D^n n'est pas un rétracte de D^n. Puis, tout application $D^n \to D^n$ a un point fixé.

MA 27/03b | ★ | Exercices 4

JE 29/03 congé universitaire

MA 03/04a | 26 | L'homologie cellulaire

— Théorème: L'homologie cellulaire est égal à l'homologie singulière

— Théorème: Les différentielles de l'homologie cellulaire comptent les degrés des applications d'attachements

— Degrés des applications $S^n \to S^n$ et ses propriétés

MA 03/04b | 27 | La classification des surfaces réelles

— Définition: variétés réelles

— L'homologie des surfaces orientables et non orientables

— Théorème (sans démonstration): la classification des surfaces

---

Le polynôme d'Alexander

JE 05/04 | 28 | Nœuds et les surfaces de Seifert

— Nœuds réguliers, leurs présentations et la notion d'un invariant

— Surfaces de Seifert et le genre d'un nœud

— Observation: Un nœud est trivial ssi son genre est 0.

— Exemples: le genre du nœud de trèfle et du nœud de huit.

MA 10/04a | 29 | La forme de Seifert

— L'enlacement entre deux nœuds et matrices de Seifert

— La construction du revêtement Abélien maximal X_∞

— Le groupe $H_1(X_\infty)$ comme $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module

MA 10/04b | ★ | Exercices 5

JE 12/04 | 30 | Le polynôme d'Alexander

— Théorème: Si A est une matrice de Seifert, $(A - tA^t)$ est une présentation finie de $H_1(X_\infty)$

— Des propriétés de base du polynôme d'Alexander

— Observation: Le polynôme d'Alexander offre une limite inférieure de genre d'un nœud

— Exemple: Le polynôme d'Alexander du nœud de tréfle

MA 24/04 | ★ | 9:00–12:00 Examen final