Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius

hiver 2018
20/02/2018
10:30–12:20

Topologie algébrique
examen intra

Vous pouvez utiliser tout résultat du cours sans justification, **à condition qu'il soit clairement indiqués**.

1 | Les propositions du professeur N. Aïve **[10 points]**

Soit $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application entre deux espaces pointés qui sont connexes par arcs et $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ son homomorphisme induit. **Prouvez ou réfutez** les propositions suivantes:

(i) $\pi_1(f)$ est un inclusion, si f est un inclusion.
(ii) $\pi_1(f)$ est un épimorphisme, si f est un épimorphisme.
(iii) $\pi_1(f)$ est un isomorphisme, si f est un homéomorphisme.

2 | Grandes sphères **[7 points]**

Pour $0 \leqslant m < n$, considérez deux sphères $X = S^m$ et $X' = S^{n-m-1}$ comme sous-espaces de S^n:

$$X = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \,\middle|\, \sum x_i^2 = 1 \right\} \subset S^n \quad \text{et}$$
$$X' = \left\{ (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \,\middle|\, \sum x_j^2 = 1 \right\} \subset S^n.$$

Montrez que $S^n \smallsetminus X$ se rétracte fortement par déformation à X'.

3 | La bricolage de Möbius **[5+4 points]**

(i) Soient $n > 1$ et $f : (S^{n-1}, *) \to (X, x_0)$ une application pointée. Décrivez soigneusement (mais sans démonstration) comment on peut calculer $\pi_1(X \cup_f D^n, x_0)$ de $\pi_1(X, x_0)$.
(ii) Soit X l'espace obtenu en collant un disque D^2 par l'identité le long la frontière d'une bande de Möbius. Calculez le groupe fondamental de X.

4 | (pushouts)$^{-1}$ **[3+4+2 points]**

(i) Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. Décrivez soigneusement la propriété universelle du produit $X_1 \times X_2$ (sans démonstration).
(ii) Soient $f_1\colon X_1 \to Y$ et $f_2\colon X_2 \to Y$ deux applications continues. Trouvez un sous-espace P de $X_1 \times X_2$ et deux applications continues $p_1\colon P \to X_1$ et $p_2\colon P \to X_2$ tels que la diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

commute et pour tout espace T et tout couple (q_1, q_2) d'applications continues $q_1\colon T \to X_1$ et $q_2\colon T \to X_2$ satisfaisant $f_1 q_1 = f_2 q_2$, il existe une application continue $q\colon T \to P$ unique telle que $q_1 = p_1 q$ et $q_2 = p_2 q$. Justifiez votre réponse.
(iii) Finalement, montrez que P est homéomorphe à X_1 si $X_2 = Y$ et $f_2 = id_Y$.

Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius

winter 2018
20/02/2018
10:30–12:20

algebraic topology
mid-term exam

You can use every result from the course without justification, **under the condition that it is clearly stated**.

1 | The propositions of professor N. Aïve **[10 points]**

Let $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ be a continuous map between two pointed spaces which are path-connected and $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ its induced homomorphism. **Prove or disprove** the following propositions:

(i) $\pi_1(f)$ is an inclusion, if f is an inclusion.
(ii) $\pi_1(f)$ is an epimorphism, if f is an epimorphism.
(iii) $\pi_1(f)$ is an isomorphism, if f is a homeomorphism.

2 | Great spheres **[7 points]**

For $0\leqslant m<n$, consider two spheres $X=S^m$ and $X'=S^{n-m-1}$ as subspaces of S^n:

$$X=\Big\{(x_0,x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\,\Big|\,\sum x_i^2=1\Big\}\subset S^n \quad\text{and}$$
$$X'=\Big\{(0,\dots,0,x_{m+1},x_{m+2},\dots,x_n)\,\Big|\,\sum x_j^2=1\Big\}\subset S^n.$$

Show that $S^n\smallsetminus X$ strongly deformation retracts onto X'.

3 | Möbius's bricolage **[5+4 points]**

(i) Let $n>1$ and $f:(S^{n-1},*)\to(X,x_0)$ be a pointed map. Describe carefully (but without proof) how one can calculate $\pi_1(X\cup_f D^n,x_0)$ from $\pi_1(X,x_0)$.
(ii) Let X be the space obtained by glueing a disc D^2 along the identity to the boundary of a Möbius band. Calculate the fundamental group of X.

4 | (pushouts)$^{-1}$ **[3+4+2 points]**

(i) Let X_1 and X_2 be two topological spaces. Describe carefully the universal property of the product $X_1\times X_2$ (without proof).
(ii) Let $f_1\colon X_1\to Y$ and $f_2\colon X_2\to Y$ be two continuous maps. Find a subspace P of $X_1\times X_2$ and two continuous maps $p_1\colon P\to X_1$ and $p_2\colon P\to X_2$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y \end{tikzcd}$$

commutes and for all spaces T and all pairs (q_1,q_2) of continuous maps $q_1\colon T\to X_1$ and $q_2\colon T\to X_2$ satisfying $f_1q_1=f_2q_2$, there exists a unique continuous map $q\colon T\to P$ such that $q_1=p_1q$ and $q_2=p_2q$. Justify your answer.
(iii) Finally, show that P is homeomorphic to X_1 if $X_2=Y$ and $f_2=id_Y$.
