Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius

hiver 2018
24/04/2018
9:00–12:00

Topologie algébrique
examen final

Vous pouvez utiliser tout résultat du cours sans justification, **à condition qu'il soit clairement indiqués**.

1 | Les autres propositions du professeur N. Aïve **[3+3+3 points]**

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ son homomorphisme induit. **Prouvez ou réfutez** les propositions suivantes:

(i) $H_n(f)$ est injectif pour tout n, si f est injective.

(ii) $H_n(f)$ est surjectif pour tout n, si f est surjective.

(iii) Soient $X = Y = S^n$. Puis f est surjective, si $H_n(f)$ est injectif.

2 | Bricolage **[3+4+4+4 points]**

Construisez un complexe cellulaire X avec une seule 0-cellule x_0 tel que $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$. Calculez le complexe de chaines cellulaires de X et son homologie. Puis, construisez le revêtement $p\colon\ \tilde{X} \to X$ associé au noyau de l'homomorphisme

$$\varphi\colon\ \langle a, b | a^2, b^2 \rangle \to \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto 1, \quad b \mapsto 0.$$

Calculez le complexe de chaines cellulaires de $\tilde{X}$ et son homologie.

3 | Borsuk-Ulam **[4+4+3 points]**

Soit $p\colon\ \tilde{X} \to X$ un revêtement. Donnez la définition d'un relèvement d'un chemin sur X et reproduisez soigneusement le lemme de relèvements des chemins (sans démonstration). En considérant un chemin entre deux points opposés sur S^2 (ou autrement), montrez qu'il n'y a pas d'application continue $f\colon\ S^2 \to S^1$ telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^2$. Finalement, déduisez que pour toute application continue $h\colon\ S^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in S^2$ tel que $h(x) = h(-x)$.

4 | Fibrés sur un cercle **[5+5+5 points]**

(i) Reproduisez le théorème de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (sans démonstration).

(ii) Soit $f\colon\ X \to X$ un homéomorphisme d'un espace topologique X. Le **tore d'application** $X(f)$ **de** f est le quotient de $X \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence donnée par

$$\forall x \in X\colon\ (x, 0) \sim (f(x), 1).$$

(Par exemple, si $X = S^1$ et f est l'identité, $X(f)$ est le tore $T^2 = S^1 \times S^1$.) Montrez qu'il existe une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X(f)) \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{1-f_*} H_n(X) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X(f)) \longrightarrow \cdots$$

où f_* et ι_* sont les homomorphismes induits par f et l'inclusion $\iota\colon\ X \times \{0\} \to X(f)$, respectivement.

(iii) Calculez l'homologie de $X(f)$ si $X = S^n$ pour $n > 1$ et $f\colon\ x \mapsto -x$ est l'application antipodal.

Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius

algebraic topology
final exam

winter 2018
24/04/2018
9:00–12:00

You can use every result from the course without justification, **under the condition that it is clearly stated**.

1 | The other propositions of professor N. Aïve **[3+3+3 points]**

Let $f\colon X \to Y$ be a continuous map between two topological spaces and $H_n(f)\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ its induced homomorphism. **Prove or disprove** the following propositions:

(i) $H_n(f)$ is injective for all n, if f is injective.

(ii) $H_n(f)$ is surjective for all n, if f is surjective.

(iii) Let $X = Y = S^n$. Then f is surjective, if $H_n(f)$ is injective.

2 | Bricolage **[3+4+4+4 points]**

Construct a cell complex X with a single 0-cell x_0 such that $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$. Compute the cellular chain complex of X and its homology. Then, construct the covering space $p\colon \tilde{X} \to X$ corresponding to the kernel of the homomorphism

$$\varphi\colon \langle a, b | a^2, b^2 \rangle \to \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto 1, \quad b \mapsto 0.$$

Also compute the cellular chain complex of $\tilde{X}$ and its homology.

3 | Borsuk-Ulam **[4+4+3 points]**

Let $p\colon \tilde{X} \to X$ be a covering space. Give the definition of a lift of a path on X and carefully state the path-lifting lemma (without proof). By considering a path between two opposite points on S^2 (or otherwise), show that there is no continuous map $f\colon S^2 \to S^1$ such that $f(-x) = -f(x)$ for all $x \in S^2$. Finally, deduce that for every continuous map $h\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$, there exists a point $x \in S^2$ such that $h(x) = h(-x)$.

4 | Fibres over a circle **[5+5+5 points]**

(i) State the theorem of the long exact Mayer-Vietoris sequence (without proof).

(ii) Let $f\colon X \to X$ be a homeomorphism of a topological space X. The **mapping torus** $X(f)$ **of** f is the quotient of $X \times [0, 1]$ by the equivalence relation

$$\forall x \in X\colon\ (x, 0) \sim (f(x), 1).$$

(For example, if $X = S^1$ and f is the identity, $X(f)$ is the torus $T^2 = S^1 \times S^1$.) Show that there exists a long exact sequence

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X(f)) \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{1-f_*} H_n(X) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X(f)) \longrightarrow \cdots$$

where f_* and ι_* are the homomorphisms induced by f and the inclusion $\iota\colon X \times \{0\} \to X(f)$, respectively.

(iii) Calculate the homology of $X(f)$ if $X = S^n$ for $n > 1$ and $f\colon x \mapsto -x$ is the antipodal map.
